UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

64. BAND, 3. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM JUNI 1960

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Moh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

64. Band./3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Cigler, J. Asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1 201

Bottema, O. Zur Kinematik der Schlittenbewegung 226

Vietoris, L. Bemerkungen und Abschätzungen zur Induktion 233

Cohen, E. The Average Order of Certain Types of Arithmetical Functions: Generalized k-free Numbers and Totient Points 251

Koschmieder, L. Turánsche und Forsythesche Funktionenfolgen 263

Lesky, P. Über die Lösung linearer homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen 272

Buchbesprechungen 289

Asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1

Von

Johann Cigler, Wien

(Eingegangen am 1. Juli 1959)

Es sei $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ eine positive Toeplitz-Matrix, d. h. es sei $a_{nk} \geqq 0$ für alle natürlichen Zahlen n und k und $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$. $\varphi_\gamma(x)$ sei die charakteristische Funktion des Intervalles $[0, \gamma)$, $0 \leqq \gamma \leqq 1$, und $\{x_k\}$ eine Folge reeller Zahlen aus $[0, 1)$.

Ist die Folge $\{\varphi_\gamma(x_k)\}$ $\mathfrak{A}$-summierbar zum Wert $z(\gamma)$ für jedes $\gamma \in [0, 1]$, d. h. ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \varphi_\gamma(x_k) = z(\gamma)$, so nennen wir $z(\gamma)$ die $\mathfrak{A}$-Verteilungsfunktion der Folge $\{x_k\}$. $z(\gamma)$ ist monoton wachsend mit $z(0)=0$ und $z(1) = 1$. Das folgt aus den Relationen $\varphi_0(x) \equiv 0$ und $\varphi_1(x) \equiv 1$ für $x \in [0, 1)$. Besonders wichtig ist der Fall $z(\gamma) = \gamma$, man nennt dann $\{x_k\}$ $\mathfrak{A}$-gleichverteilt.

Existiert der $\mathfrak{A}$-Limes von $\{\varphi_\gamma(x_k)\}$ nicht für jedes $\gamma \in [0, 1]$, so nennen wir $\Omega(\gamma) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \varphi_\gamma(x_k)$ die obere und $\omega(\gamma) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \varphi_\gamma(x_k)$ die untere Verteilungsfunktion der Folge $\{x_k\}$.

Die Folge $\{x_k\}$ besitzt genau dann[1] die $\mathfrak{A}$-Verteilungsfunktion $z(\gamma)$, wenn für jede auf $[0, 1]$ definierte stetige Funktion $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, f(x_k) = \int_0^1 f(x)\, d\, z(x)$$

gilt.

Das wichtigste Kriterium ist jedoch der folgende Satz[1], der im wesentlichen von *H. Weyl* stammt: Die Folge $\{x_k\}$ hat genau dann $z(\gamma)$ als $\mathfrak{A}$-Verteilungsfunktion, wenn für jede natürliche Zahl q gilt:

---

[1] Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ die Matrix des arithmetischen Mittels ist, vgl. [5], für allgemeine Matrizen $\mathfrak{A}$ siehe [4].

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, e^{2\pi i q x_k} = \int_0^1 e^{2\pi i q x}\, dz(x). \tag{1}$$

Im Fall der Gleichverteilung $z(\gamma) = \gamma$ lautet (1):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, e^{2\pi i q x_k} = 0. \tag{2}$$

Das *Weyl*'sche Kriterium verknüpft die Theorie der Gleichverteilung mit der Theorie der divergenten Folgen. Dieser Zusammenhang steht im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit, die aus vier Abschnitten besteht, deren erster der Übertragung bekannter Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen auf den Fall der Gleichverteilung gewidmet ist. Im zweiten und dritten Teil wird eine spezielle Klasse von Folgen betrachtet. Es sind dies Folgen der Gestalt $\{f(\nu)\}$, wo $f(x)$ gewissen Bedingungen unterliegt, die im wesentlichen darin bestehen, daß $f(x)$ stetig differenzierbar ist und $f'(x)$ monoton gegen Null strebt. Es werden die Verteilungsfunktionen dieser Folgen bezüglich bewichteter Mittel untersucht.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt dabei die Reihe der Summierungsverfahren $(M, 1) \subset (M, \frac{1}{n}) \subset (M, \frac{1}{n \log n}) \subset \ldots$, die zuerst von *M. Tsuji* ([9]) betrachtet worden war.

Der dritte Teil schließt mit einer Reihe von Beispielen, in denen Mittel der Gestalt (M, λ_n) betrachtet werden, wo λ_n eine zahlentheoretische Funktion bedeutet. Im vierten und letzten Abschnitt wird dann eine hinreichende Bedingung für die Gleichverteilung von Doppelfolgen hergeleitet.

I.

1. Die Summierungsverfahren von Cesàro und Abel.

Die Matrix des (C, k)-Verfahrens ist definiert durch $(C, k) = (a_{nl})$, wo

$$\begin{aligned} a_{nl} &= \binom{n-l+k-1}{k-1} \Big/ \binom{n+k}{k}, && 0 \leqq l \leqq n \\ &= 0 && l > n. \end{aligned}$$

Ist $\lim_{t\to 1-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n = s$, so sagt man, die Folge s_n sei A-summierbar zum Wert s.

Das wichtigste dieser Verfahren ist das $(C, 1)$-Verfahren. Wir werden im folgenden das $(C, 1)$ stets weglassen und kurz von Verteilungsfunktion, Gleichverteilung usw. sprechen. wenn es sich um $(C, 1)$-Verteilungsfunktion, $(C, 1)$-Gleichverteilung usw. handelt.

Wir zeigen nun, daß $(C, 1)$-Gleichverteilung und A-Gleichverteilung äquivalent sind. Genauer gilt der folgende

Satz 1: *Eine Folge* $\{x_k\}$ *ist genau dann* (C, k)- $(k > 1)$ *oder A-verteilt zur Verteilungsfunktion* $z(x)$, *wenn sie* $(C, 1)$-*verteilt zur selben Funktion ist.*

Beweis:[2] Es gilt allgemein: Ist eine Folge $(C, 1)$-summierbar, dann ist sie auch (C, k)-summierbar für beliebiges $k > 1$, und zwar zum selben Wert[3]. Ist eine Folge (C, k)-summierbar für ein $k \geqq 1$, dann ist sie auch A-summierbar, und zwar ebenfalls zum selben Wert[4]. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Für den zweiten Teil benützen wir folgenden *Tauber*'schen Satz:[5]

Ist $\lim\limits_{t \to 1-} (1-t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n t^n = C$ und ist $s_n = O(1)$, dann gilt bereits

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = C.$$

Ist also $\lim\limits_{t \to 1-} (1-t) \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{2\pi i q x_k} t^k = \int\limits_0^1 e^{2\pi i q x} dz(x)$, dann ist wegen $e^{2\pi i q x} = O(1)$ auch $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k \leq n} e^{2\pi i q x_k}}{n} = \int\limits_0^1 e^{2\pi i q x} dz(x)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2. Die Verfahren von Euler und Borel.

Eine Folge $\{x_k\}$ heißt (E, s)-verteilt zur Funktion $z(x)$, $(s > 0$, beliebig, reell), wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} e^{2\pi i q x_k}}{(s+1)^n} = \int_0^1 e^{2\pi i q x} dz(x)$$

ist, sie heißt B-verteilt, wenn

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i q x_n} \frac{x^n}{n!} = \int_0^1 e^{2\pi i q x} dz(x)$$

gilt.

Über diese Verfahren beweisen wir den

Satz 2: *Ist eine Folge* $\{x_k\}$ (E, s)- *oder B-verteilt zur Funktion* $z(x)$, *dann ist sie auch* $(C, 1)$-*verteilt, und zwar zur selben Verteilungsfunktion.*

---

[2] Für die verwendeten Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen, siehe [2].
[3] [2], S. 100.
[4] [2], S. 108.
[5] [2], S. 155.

Beweis: Ist eine Folge (E, s)-summierbar, dann ist sie auch B-summierbar zur selben Summe[6].

Andererseits gilt:[7] Ist $\varrho \geqq -1/2$, $a_n = o(n^\varrho)$ und die Folge $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ B-summierbar, dann ist $\{s_n\}$ auch $(C, 2\varrho + 1)$-summierbar. Die Voraussetzungen sind alle erfüllt, da $a_n = e^{2\pi i q x_n} - e^{2\pi i q x_{n-1}} = o(n)$. Daraus folgt, daß $\{e^{2\pi i q x_k}\}$ $(C, 3)$-summierbar ist. Aus Satz 1 folgt dann die Behauptung des Satzes.

3. Bewichtete Mittel.

Wir beschränken uns hier nicht auf einfache Folgen, sondern lassen auch Doppel- und Mehrfachfolgen zu.

Es sei R_k der k-dimensionale euklidische Raum, $\mathfrak{B}$ eine Folge von Quadern $B_n \subset R_k$, mit der Eigenschaft, daß die Anzahl der Gitterpunkte $(i_1 \ldots, i_k) \in B_n$ für $n \to \infty$ unbeschränkt wächst. Die Folge $s_{i_1 \ldots i_k}$ heißt in den Quadern $B_n \in \mathfrak{B}$ $(M, p_{i_1, \ldots i_k})$-summierbar, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum \ldots \sum p_{i_1 \ldots i_k} \cdot s_{i_1 \ldots i_k}}{\sum \ldots \sum p_{i_1 \ldots i_k}} = s$$

ist, wobei über alle Gitterpunkte aus B_n summiert wird.

Im Folgenden sei stets $p_{i_1 \ldots i_k} = p_{i_1}^{(1)} \cdot p_{i_2}^{(2)} \ldots p_{i_k}^{(k)}$, wobei $p_{i_\nu}^{(\nu)} > 0$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ und

$$\lim_{n_\nu \to \infty} P_{n_\nu}^{(\nu)} = \lim_{n_\nu \to \infty} \sum_{i_\nu = 0}^{n_\nu} p_{i_\nu}^{(\nu)} = \infty \tag{3}$$

gelte.

Sind P und Q irgendwelche Summierungsverfahren, so sagt man, Q sei stärker als P, in Zeichen $Q \supseteq P$, wenn jede P-summierbare Folge auch Q-summierbar ist. Ein Verfahren heißt regulär, wenn jede konvergente Folge P-summierbar ist und Grenzwert und P-Limes übereinstimmen.

Ein Verfahren P, das der Folge $\{s_{i_1 \ldots i_k}\}$ den Grenzwert $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(\alpha) \cdot s_{i_1 \ldots i_k}$ zuordnet, ist genau dann regulär[8], wenn

a) $\sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} |\varphi_{i_1 \ldots i_k}(\alpha)| < K$,

---

[6] [2], S. 183.

[7] [2], S. 210.

[8] Vgl. [7], S. 23, 31. Der Satz gilt nur, wenn $|s_{i_1 \ldots i_k}| < C$ für alle Gitterpunkte $(i_1, \ldots, i_k)$ ist. Für $k=1$ reduziert sich (4) auf die Toeplitzbedingungen.

$$\text{b) } \lim_{\alpha \to \alpha_0} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} |\varphi_{i_1 \dots i_k}(\alpha)| = 0 \qquad (i_1 = 0, 1, \dots) \tag{4}$$

und die analogen Bedingungen für $i_2, \dots, i_k$ erfüllt sind, und

$$\text{c) } \lim_{\alpha \to \alpha_0} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} \varphi_{i_1 \dots i_k}(\alpha) = 1 \text{ ist.}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß das Verfahren $(M, p_{i_1}^{(1)} \dots p_{i_k}^{(k)})$ in den Quadern $0 \leqq i_\nu \leqq n_\nu$ $(\nu = 1, \dots, k)$ unter den Voraussetzungen (3) regulär ist. Dabei ist

$$\varphi_{i_1 \dots i_k} = \frac{p_{i_1}^{(1)} \dots p_{i_k}^{(k)}}{P_{n_1}^{(1)} \dots P_{n_k}^{(k)}} \quad (i_\nu \leqq n_\nu), \; = 0 \quad (i_\nu > n_\nu)$$

und die Grenzrelation $\alpha \to \alpha_0$ nimmt die Gestalt an: $\lim_{\min n_\nu \to \infty} \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \dots$

Es gilt nun der für das Folgende wichtige Satz 3:

Satz 3: Ist $p_n > 0$, $q_n > 0$, $\Sigma p_n = \infty$, $\Sigma q_n = \infty$ *und entweder*

$$(\alpha) \qquad \frac{q_{n+1}}{q_n} \leqq \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

oder

$$(\beta) \qquad \frac{p_{n+1}}{p_n} \leqq \frac{q_{n+1}}{q_n} \tag{5}$$

$$\text{und} \qquad \frac{P_n}{p_n} \leqq H \cdot \frac{Q_n}{q_n},$$

dann gilt $(M, q_n) \trianglerighteq (M, p_n)$.

Ist für jedes Paar $(p_n^{(\nu)}, q_n^{(\nu)})$ *entweder* (α) *oder* (β) *erfüllt, dann gilt* $(M, q_{n_1}^{(1)} \dots q_{n_k}^{(k)}) \trianglerighteq (M, p_{n_1}^{(1)} \dots p_{n_k}^{(k)})$.

(Der erste Teil des Satzes stammt von *Cesàro* und *Hardy*, vgl. [2], S. 58.)

Der Beweisgedanke ist kurz folgender: Man drückt die (M, q_n)-Transformierte der Folge $\{s_n\}$ durch die (M, p_n)-Transformierte aus und zeigt, daß die zugehörige Matrix regulär ist. Wir beweisen nun ganz analog den mehrdimensionalen Fall. Um Indizes zu sparen, schreiben wir statt $p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}, \dots$ kurz $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots$

Wir setzen:

$$t_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{p_{i_1}}{P_{n_1}} \dots \frac{p_{i_k}}{P_{n_k}} s_{i_1 \dots i_k} \tag{6}$$

$$u_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{q_{i_1}}{Q_{n_1}} \dots \frac{q_{i_k}}{Q_{n_k}} s_{i_1 \dots i_k} \tag{7}$$

Dann gilt:

$$u_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} c_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} t_{i_1 \dots i_k}, \tag{8}$$

mit

$$c_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = \left(\frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} - \frac{q_{i_1+1}}{p_{i_1+1}}\right) \dots \left(\frac{q_{i_k}}{p_{i_k}} - \frac{q_{i_k+1}}{p_{i_k+1}}\right) \cdot \frac{P_{i_1}}{Q_{n_1}} \dots \frac{P_{i_k}}{Q_{n_k}} \tag{9}$$

für $0 \leqq i_l \leqq n_l$ $(l = 1, \dots, k)$, wobei im Fall $i_l = n_l$

$q_{i_l+1} = 0$ zu setzen ist,

$c_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = 0$ sonst.

Zum Beweis setzen wir $D_l x_{i_1 \dots i_l \dots i_k} = x_{i_1 \dots i_l - 1 \dots i_k}$ $(i_l \geqq 1)$ und $= 0$ sonst. E_l sei der inverse Operator $E_l D_l = 1$. Ferner sei $\Delta_l = 1 - D_l$, also $\Delta_l x_{i_1 \dots i_l \dots i_k} = x_{i_1 \dots i_l \dots i_k} - x_{i_1 \dots i_l - 1 \dots i_k}$.

Aus (6) folgt:

$$s_{i_1 \dots i_k} = \frac{\Delta_1 \dots \Delta_k P_{i_1} \dots P_{i_k} \cdot t_{i_1 \dots i_k}}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}.$$

Setzt man das in (7) ein, so bekommt man

$$u_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} \dots \frac{q_{i_k}}{p_{i_k}} \cdot \frac{1}{Q_{n_1} \dots Q_{n_k}} (1-D_1) \dots (1-D_k) P_{i_1} \dots P_{i_k} \cdot t_{i_1 \dots i_k} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \left\{(1-E_1) \dots (1-E_k) \frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} \dots \frac{q_{i_k}}{p_{i_k}}\right\} \frac{P_{i_1}}{Q_{n_1}} \dots \frac{P_{i_k}}{Q_{n_k}} t_{i_1 \dots i_k}$$

und daraus liest man die Behauptung unmittelbar ab.

Wir müssen nun zeigen, daß das durch (8) definierte Summationsverfahren regulär ist. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $k = 1$ ist der Satz richtig. Der Satz sei schon für alle natürlichen Zahlen $< k$ bewiesen.

(4) c) folgt unmittelbar aus der Definition des Verfahrens.

(4) b) ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\lim_{\substack{\min n_i \to \infty \\ i \geq 2}} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \left| \left(\frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} - \frac{q_{i_1+1}}{p_{i_1+1}} \right) \dots \left(\frac{q_{i_k}}{p_{i_k}} - \frac{q_{i_k+1}}{p_{i_k+1}} \right) \cdot \frac{P_{i_1}}{Q_{n1}} \dots \frac{P_{i_k}}{Q_{n_k}} \right| =$$

$$\lim_{\substack{\min n_i \to \infty \\ i \geq 2}} \left| \frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} - \frac{q_{i_1+1}}{p_{i_1+1}} \right| \cdot \frac{P_{i_1}}{Q_{n_1}} \cdot \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \left| \left(\frac{q_{i_2}}{p_{i_2}} - \frac{q_{i_2+1}}{p_{i_2+1}} \right) \dots \right.$$

$$\left. \dots \left(\frac{q_{i_k}}{p_{i_k}} - \frac{q_{i_k+1}}{p_{i_k+1}} \right) \right| \frac{P_{i_2}}{Q_{n_2}} \dots \frac{P_{i_k}}{Q_{n_k}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung und (4) a) ist der zweite Teil des letzten Ausdruckes beschränkt, während $\left| \frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} - \frac{q_{i_1+1}}{p_{i_1+1}} \right| \cdot \frac{P_{i_1}}{Q_{n_1}}$ gegen Null strebt für jedes feste $i_1 = 0, 1, \dots$

Analog verläuft der Beweis, wenn $i_2, \dots i_k$ fest sind. Nun zu (4) a)! Es ist zu zeigen

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} \left| \left(\frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} - \frac{q_{i_1+1}}{p_{i_1+1}} \right) \dots \left(\frac{q_{i_k}}{p_{i_k}} - \frac{q_{i_k+1}}{p_{i_k+1}} \right) \right| \frac{P_{i_1}}{Q_{n_1}} \dots \frac{P_{i_k}}{Q_{n_k}} < K \quad (10)$$

gleichgültig, wie groß $n_1, \dots n_k$ genommen werden.

Dazu zerlege man (10) in das Produkt von zwei Summen, etwa $(\Sigma)_{i_1} \cdot (\Sigma \dots \Sigma)_{i_2 \dots i_k}$. Jede dieser Summen ist nach Induktionsvoraussetzung und (4) a) beschränkt, daher auch ihr Produkt.

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Speziell ergibt sich aus Satz 3 und $1 \geqq \frac{n}{n+1} \geqq \frac{n \log n}{(n+1)\log(n+1)} \geqq \dots$,

daß $(M, 1) \subseteq (M, \frac{1}{n}) \subseteq (M, \frac{1}{n \log n}) \subseteq \dots$

Wir werden später zeigen, daß hier nirgends das Gleichheitszeichen gilt.

Ein anderer Spezialfall ist

Satz 4: Ist $\sigma > -1$, dann ist die Folge $\{x_k\}$ genau dann (M, n^σ)-verteilt zur Verteilungsfunktion $z(x)$, wenn sie $(M, 1) = (C, 1)$-verteilt zur selben Funktion ist.

Ist $\sigma_1 > -1, \dots, \sigma_k > -1$, dann ist die Folge $\{x_{i_1 \dots i_k}\}$ dann und nur dann $(M, n_1^{\sigma_1} n_2^{\sigma_2} \dots n_k^{\sigma_k})$-verteilt zur Verteilungsfunktion $z(x)$, wenn sie $(M, 1 \cdot 1 \dots \cdot 1)$-verteilt ist.

Zum Beweis nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $\sigma \geqq 0$. Der Fall $\sigma < 0$ erledigt sich ganz analog.

Es ist $1 \leqq \frac{(n+1)^\sigma}{n^\sigma}$ und daraus folgt $(M, 1) \supseteq (M, n^\sigma)$.

Andererseits ist $\frac{\sum\limits_{\nu<n} 1}{1} \leqq H \cdot \frac{\sum\limits_{\nu<n} \nu^\sigma}{n^\sigma}$, weil $\sum\limits_{\nu<n} \nu^\sigma \sim \frac{n^{\sigma+1}}{\sigma+1}$ ist. Daraus ergibt sich nach (5) (β) die umgekehrte Inklusion $(M, n^\sigma) \supseteq (M, 1)$.

Damit ist die Äquivalenz dieser Verfahren bewiesen.

II.

Für das Folgende benötigen wir einen einfachen Spezialfall der Euler'schen Summenformel:

Ist $f(x)$ für $x \geqq 1$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)\,dx + \int_1^n (x - [x])\, f'(x)\,dx \tag{11}$$

Analog im Fall zweier Veränderlicher:

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n} f(i,j) = \int_1^m\int_1^n f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^m\int_1^n (x-[x])\, f_x(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+ \int_1^m\int_1^n (y-[y])\, f_y(x,y)\,dx\,dy + \int_1^m\int_1^n (x-[x])\,(y-[y])\, f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \tag{12}$$

Der Beweis ergibt sich aus

$$f(m) - \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx = \int_{m-1}^{m} (f(m) - f(x))\,dx =$$

$$= \int_{m-1}^{m} (f(m) - f(x)) \frac{d(x-[x])}{dx}\,dx = \int_{m-1}^{m} (x-[x])\, f'(x)\,dx,$$

wenn man von $m = 2$ bis n summiert. (12) ergibt sich durch Iteration des Verfahrens.

Ersetzt man in (11) $f(x)$ durch $e^{2\pi i q f(x)}$, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=2}^{n} e^{2\pi i q f(\nu)} = \int_1^n e^{2\pi i q f(x)} dx + 2\pi i q \int_1^n (x-[x])\, f'(x)\, e^{2\pi i q f(x)}\,dx. \tag{13}$$

Wir sagen kurz, die Funktion $f(x)$ habe die Verteilungsfunktion $z(x)$ mod 1, wenn die Folge $\{f(\nu) - [f(\nu)]\}$ diese Verteilungsfunktion besitzt.

Wir zeigen nun einige Sätze über monotone stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$, für die $f'(x)$ gegen Null strebt. Die Verteilungsfunktionen dieser Folgen lassen sich besonders leicht untersuchen, da sich,

wie aus (13) sofort ersichtlich, die Summen $\sum_{\nu \leq n} e^{2\pi i q f(\nu)}$ im wesentlichen wie die entsprechenden Integrale $\int_1^n e^{2\pi i q f(x)}\, dx$ verhalten.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Mittel $(M, h(n))$, wo $h(x)$ eine stetige monoton nicht zunehmende reelle Funktion ist.

Satz 5: Ist $g(x)$ eine monoton wachsende, zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion, ist $g'(x)$ monoton nicht zunehmend und ist $f(x)$ eine monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \to 0$ für $x \to \infty$, so ist $f(g(x))$ genau dann $(M, g'(n))$-verteilt zur Verteilungsfunktion $z(x)$, wenn $f(x)$ $(C, 1)$-verteilt zur selben Verteilungsfunktion ist.

Beweis: Es ist

$$\sum_{\nu=2}^{n} e^{2\pi i q f(\nu)} = \int_1^n e^{2\pi i q f(x)}\, dx + \int_1^n (x - [x])\, 2\pi i q\, f'(x)\, e^{2\pi i q f(x)}\, dx =$$

$$= \int_1^n e^{2\pi i q f(x)}\, dx + O\left(\int_1^n f'(x)\, dx\right) = \int_1^n e^{2\pi i q f(x)}\, dx + o(n),$$

also

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i q f(\nu)}}{n} = \frac{\int_1^n e^{2\pi i q f(x)}\, dx}{n} + o(1) \tag{14}$$

Andererseits haben wir $\sum_{\nu=2}^{n} g'(\nu)\, e^{2\pi i q f(g(\nu))} = \int_1^n e^{2\pi i q f(g(x))}\, g'(x)\, dx +$

$$+ \int_1^n (x - [x])\, (g'(x)\, e^{2\pi i q f(g(x))})'\, dx = \int_1^n e^{2\pi i q f(g(x))} g'(x)\, dx + O\left(\int_1^n |g''(x)|\, dx\right) +$$

$$+ O\left(\int_1^n f'(g(x))\, (g'(x))^2\, dx\right) = \int_{g(1)}^{g(n)} e^{2\pi i q f(x)}\, dx + o(g(n)).$$

Also gilt

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} g'(\nu)\, e^{2\pi i q f(g(\nu))}}{\sum_{\nu=1}^{n} g'(\nu)} = \frac{\int_1^{[g(n)]} e^{2\pi i q f(x)}\, dx}{[g(n)]} + o(1). \tag{15}$$

Aus (14), (15) und (1) folgt die Behauptung des Satzes.

Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 6: Ist $f(x)$ monoton wachsend, stetig differenzierbar, strebt $f'(x)$ gegen Null für $x \to \infty$ und ist die Folge $\{f(\nu)\}$ gleichverteilt mod 1, so ist auch die Folge $\{f(\nu^\sigma)\}$ für beliebiges σ mit $0 < \sigma \leqq 1$ gleichverteilt mod 1.

Beweis: Nach Satz 5 ist $f(x^\sigma)$ $(M, \sigma n^{\sigma-1})$-gleichverteilt, also nach Satz 4 $(C, 1)$-gleichverteilt, w.z.b.w.

Etwas allgemeiner gilt

Satz 7: Ist $f(x)$ monoton wachsend, stetig differenzierbar, strebt $f'(x)$ monoton gegen Null für $x \to \infty$ und ist die Folge $\{f(\nu)\}$ gleichverteilt mod 1, so ist es auch die Folge $\{f(\nu^\sigma + \varphi(\nu))\}$, wenn $0 < \sigma \leqq 1$ und $\varphi(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $\varphi(x) = o(x^\sigma)$, $\varphi'(x) = o(x^{\sigma-1})$ ist.

Beweis: Nach Satz 5 ist $f(x^\sigma + \varphi(x))$ $(M, \sigma n^{\sigma-1} + \varphi'(n))$-gleichverteilt und nach Satz 3 braucht nur mehr gezeigt zu werden:

$$\frac{\sigma(n+1)^{\sigma-1} + \varphi'(n+1)}{\sigma n^{\sigma-1} + \varphi'(n)} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^\sigma + \varphi(x)}{\sigma x^{\sigma-1} + \varphi'(x)} \leqq H x$$

Diese Relationen sind aber offenbar erfüllt.

Wir bemerken noch: Ist $f(x)$ für $x = 1, \ldots, n_0$ nicht definiert oder erfüllt es dort nicht die geforderten Bedingungen, so beginnen wir die Summation erst später. Analoges gilt, wenn $p_1, \ldots, p_{n_0}$ nicht definiert sind.

Wir betrachten also dann den Limes von

$$\frac{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} p_\nu e^{2\pi i q f(\nu)}}{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} p_\nu}.$$

Diese Festsetzung führt zu keinen Widersprüchen, denn

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu e^{2\pi i q f(\nu)}}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} = \frac{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} p_\nu e^{2\pi i q f(\nu)}}{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} p_\nu} + o(1),$$

weil nach Voraussetzung $\sum_{0}^{\infty} p_\nu = \infty$ ist.

Satz 8:[9] *Es sei $f(x)$ monoton wachsend, zweimal stetig differenzierbar, $f(x) \to \infty$, $f'(x)$ monoton gegen Null, dann ist die Folge $\{f(\nu)\}$ $(M, f'(n))$-gleichverteilt.*

Beweis: $\sum_{\nu=2}^{n} f'(\nu) e^{2\pi i q f(\nu)} = \int_1^n e^{2\pi i q f(x)} f'(x)\, dx + \int_1^n (x - [x])\,(f'(x) e^{2\pi i q f(x)})'\, dx =$

$$= \int_{f(1)}^{f(n)} e^{2\pi i q x}\, dx + O\left(\int_1^n |f''(x)|\, dx\right) + O\left(\int_1^n (f'(x))^2\, dx\right) = o(f(n)).$$

Wir sind nun in der Lage, Satz 9 zu beweisen.

---

[9] Satz 8 und zum Teil auch Satz 5 sind implizit in einem Kriterium von *M. Tsuji* über (M, μ_n)-Gleichverteilung enthalten. Vgl. [9].

Satz 9: Eine monoton wachsende, zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, für die $f(x) \to \infty$, $f'(x)$ monoton gegen Null strebt, besitzt entweder überhaupt keine $(C, 1)$-Verteilungsfunktion oder sie ist gleichverteilt.

Beweis: Da $f(x)$ monoton gegen Null strebt, ist $\dfrac{f'(n+1)}{f'(n)} \leqq 1$. Besitzt also $f(x)$ $z(x)$ als $(C, 1)$-Verteilungsfunktion, dann nach Satz 3 auch als $(M, f'(n))$-Verteilungsfunktion, womit schon alles gezeigt ist, wenn man Satz 8 beachtet.

III.

Wir wollen nun die asymptotische Verteilung reeller Zahlenfolgen direkt untersuchen, d. h. ohne Verwendung trigonometrischer Summen. Diese Methode wird uns auch zu Ergebnissen über obere und untere Verteilungsfunktionen mod 1 führen.

Es sei $0 \leqq \gamma \leqq 1$. $\varphi_\gamma(x)$ sei die charakteristische Funktion des Intervalles $[0, \gamma)$ mod 1, d. h.

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(x) &= 1 \qquad k \leqq x < k + \gamma \qquad\qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ &= 0 \qquad k + \gamma \leqq x < k + 1 \end{aligned}$$

Satz 10: $f(x)$ sei für $x \geqq 1$ reell, stetig, monoton wachsend und strebe mit x gegen Unendlich. μ_ν seien reelle Zahlen mit $0 < \mu_\nu < K$ und $\sum_1^\infty \mu_\nu = \infty$. Weiters sei $N(x) = \sum_{f(\nu) < x} \mu_\nu$. Wenn die ganze Zahl ϱ gegen Unendlich strebt, existiere für jedes feste γ $(0 \leqq \gamma \leqq 1)$ der Grenzwert

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{N(\varrho + \gamma) - N(\varrho)}{N(\varrho + 1) - N(\varrho)} = \psi(\gamma).$$

Setzt man noch $\underline{\lim}\, \dfrac{N(\varrho)}{N(\varrho + \gamma)} = \chi(\gamma)$, *so sind* $\omega(\gamma) = \psi(\gamma)$ *und* $\Omega(\gamma) = 1 - \chi(\gamma)\{1 - \psi(\gamma)\}$ *die untere bzw. obere (M, μ_ν)-Verteilungsfunktion von $f(x)$.*

Beweis: Wir setzen $f(\nu) = f_\nu$, $f(n) = m_n + x_n$ (m_n ganz, $0 \leqq x_n < 1$) und $\lambda_n = \min(x_n, \gamma)$.

Dann ist $\sum_{1 \leqq \nu < n} \mu_\nu \varphi_\gamma(f_\nu) = \sum_{k=0}^{m_n - 1} \sum_{k \leqq f_\nu < k+1} \mu_\nu \varphi_\gamma(f_\nu) + \sum_{m_n \leqq f_\nu < m_n + x_n} \mu_\nu \varphi_\gamma(f_\nu)$. Also

$$\sum_{1 \leqq \nu < n} \mu_\nu \varphi_\gamma(f_\nu) = \sum_{k=0}^{m_n - 1} \sum_{k \leqq f_\nu < k+\gamma} \mu_\nu + \sum_{m_n \leqq f_\nu < m_n + \lambda_n} \mu_\nu \tag{16}$$

Dabei setzen wir per def. $\sum_{k\le t_\nu<k} = 0$.

Es ist somit

$$M_n(\gamma)=\frac{\sum\limits_{1\le\nu<n}\mu_\nu\varphi_\gamma(t_\nu)}{\sum\limits_{1\le\nu<n}\mu_\nu}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_n-1}N(k+\gamma)-N(k)}{N(m_n+x_n)}+\frac{N(m_n+\lambda_n)-N(m_n)}{N(m_n+x_n)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_n-1}\frac{N(k+\gamma)-N(k)}{N(k+1)-N(k)}(N(k+1)-N(k))}{N(m_n+x_n)}+\frac{N(m_n+\lambda_n)-N(m_n)}{N(m_n+x_n)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_n-1}(\psi(\gamma)+o(1))(N(k+1)-N(k))}{N(m_n+x_n)}+\frac{N(m_n+\lambda_n)-N(m_n)}{N(m_n+x_n)}.$$

Also ist

$$M_n(\gamma)=\psi(\gamma)\frac{N(m_n)}{N(m_n+x_n)}+\frac{N(m_n+\lambda_n)-N(m_n)}{N(m_n+x_n)}+o(1).$$

Es ist zu zeigen: $\underline{\lim}\, M_n(\gamma)=\psi(\gamma)$

$$\overline{\lim}\, M_n(\gamma)=1-\chi(\gamma)\{1-\psi(\gamma)\}.$$

Um den Satz zu beweisen, genügt es, alle Teilfolgen zu betrachten, für die die Folge $\{x_n\}$ konvergent ist. Zu zeigen ist, daß die Häufungspunkte dieser Teilfolgen zwischen $\omega(\gamma)$ und $\Omega(\gamma)$ liegen und daß es spezielle Teilfolgen gibt, für die der $\underline{\lim}=\omega(\gamma)$ bzw. $\overline{\lim}=\Omega(\gamma)$ ist.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte. Die Fälle $\gamma=0$ und $\gamma=1$ sind trivial, es sei also $0<\gamma<1$.

1. Wir betrachten Teilfolgen, für die x_{n_ν} gegen $\xi\leqq\gamma$ strebt. Dann ist

$$M_{n_\nu}(\gamma)=1-(1-\psi(\gamma))\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})}.$$

a) $$\overline{\lim}\, M_{n_\nu}(\gamma)=1-(1-\psi(\gamma))\,\underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})}=1-(1-\psi(\gamma))\chi(\xi).$$

Wegen $\chi(\xi)\geqq\chi(\gamma)$ ist also $\overline{\lim\limits_{x_{n_\nu}\to\xi}} M_{n_\nu}(\gamma)\leqq 1-(1-\psi(\gamma))\chi(\gamma)$ und das Gleichheitszeichen gilt für eine Folge $\{\overline{x_{n_\nu}}\}$, für die $\frac{N(\overline{m_{n_\nu}+x_{n_\nu}})}{N(\overline{m_{n_\nu}+\gamma})}\to 1$ strebt. Eine solche Folge gibt es, wenn die Folge $\{x_n\}$ einen Häufungspunkt $\xi\leqq\gamma$ besitzt. Ist das nicht der Fall, so kommen wir auf den

Fall $\gamma = 0$ zurück, denn $\psi(x)$ und $\chi(x)$ sind in jedem Intervall, das keinen Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ enthält, konstant.

b) $\underline{\lim}_{x_{n_\nu} \to \xi} M_{n_\nu}(\gamma) = 1-(1-\psi(\gamma))\,\overline{\lim}\,\dfrac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \geqq 1-(1-\psi(\gamma)) = \psi(\gamma)$,

weil $\overline{\lim}\,\dfrac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \leqq 1$ ist.

2. $x_{n_\nu} \to \xi \geqq \gamma$:

$$M_{n_\nu}(\gamma) = \psi(\gamma)\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} + \frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})}$$

a) $\overline{\lim}_{x_{n_\nu} \to \xi} M_{n_\nu}(\gamma)$:

$$M_{n_\nu}(\gamma) \leqq \psi(\gamma)\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} + \frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+\gamma)} \leqq$$

$$\leqq \psi(\gamma)\,\overline{\lim_{x_{n_\nu} \to \xi}}\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} + 1 - \chi(\gamma) \leqq \psi(\gamma)\,\chi(\gamma) + 1 - \chi(\gamma).$$

Die letzte Ungleichung folgt aus:

$$\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \leqq \frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+\gamma)} \to \overline{\lim_{x_{n_\nu} \to \xi}}\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \leqq \underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+\gamma)} = \chi(\gamma).$$

b) $\underline{\lim}\, M_{n_\nu}(\gamma)$:

Es ist zu zeigen: $\underline{\lim}\, M_{n_\nu}(\gamma) \geqq \psi(\gamma)$.

Nun gilt:

$$\underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu}) - N(m_{n_\nu})} \geqq \underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+1) - N(m_{n_\nu})} = \psi(\gamma)$$

$$\to \underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu}) - N(m_{n_\nu})} - \psi(\gamma) \geqq 0$$

$$\to \underline{\lim}\,\frac{N(m_{n_\nu}+\gamma) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu}) - N(m_{n_\nu})} \cdot \frac{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu}) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} -$$

$$- \psi(\gamma) \cdot \frac{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu}) - N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \geqq 0$$

$$\to \varliminf \frac{N(m_{n_\nu}+\gamma)}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} - (1-\psi(\gamma))\,\frac{N(m_{n_\nu})}{N(m_{n_\nu}+x_{n_\nu})} \geqq \psi(\gamma).$$

Wie man sofort sieht, gilt hier das Gleichheitszeichen für eine Folge $\{\bar{x}_{n_\nu}\}$ für die $\lim \dfrac{N(\bar{m}_{n_\nu}+\bar{x}_{n_\nu})}{N(\bar{m}_{n_\nu}+1)} = 1$ ist.

Damit ist der Beweis vollendet.

Bemerkung: *W. J. LeVeque* ([6]) untersuchte Gleichverteilung modulo einer Unterteilung $\Delta = (z_0, z_1, \ldots)$, wo $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots$ und $\lim z_n = \infty$.

Er setzt für $z_{n-1} \leqq x < z_n$: $[x]_\Delta = z_{n-1}$, $\delta(x) = \delta_n = z_n - z_{n-1}$, $(x)_\Delta = \dfrac{x-[x]_\Delta}{\delta(x)}$ und nennt die Folge $\{x_k\}$ gleichverteilt mod Δ, wenn die Folge $\{(x_k)_\Delta\}$ gleichverteilt mod 1 ist.

Analog definiert man obere und untere Verteilungsfunktionen mod Δ.

Der vorangegangene Satz überträgt sich mit ungeändertem Beweis auf diesen Fall und kann folgendermaßen formuliert werden:

Satz 11: *$f(x)$ sei für $x \geqq 1$ reell, stetig, monoton wachsend und strebe mit x gegen Unendlich. μ_ν seien reelle Zahlen mit $0 < \mu_\nu < K$, $\sum_1^\infty \mu_\nu = \infty$. Weiters sei $N(x) = \sum_{f(\nu)<x} \mu_\nu$. Es gelte $\dfrac{N(z_n+\gamma\,\delta_n)-N(z_n)}{N(z_{n+1})-N(z_n)} \to \psi(\gamma)$. Setzt man $\varliminf \dfrac{N(z_n)}{N(z_n+\gamma\,\delta_n)} = \chi(\gamma)$, so sind $\omega(\gamma) = \psi(\gamma)$ und $\Omega(\gamma) = 1-\chi(\gamma)$ $\{1-\psi(\gamma)\}$ die untere bzw. obere (M, μ_n)-Verteilungsfunktion von $f(x)$ mod Δ. Insbesondere ist $f(x)$ (M, μ_n)-gleichverteilt mod Δ, wenn $\psi(\gamma) = \gamma$, $\chi(\gamma) \equiv 1$.*

LeVeque zeigt im Fall $\mu_n \equiv 1$: $(x_k = f(k))$. $\psi(\gamma) = \gamma$ sicher dann, wenn $\max\limits_{x_{k-1} \vee x_k \in [z_{n-1}, z_n]} (x_k - x_{k-1}) \sim \min\limits_{x_{k-1} \vee x_k \in [z_{n-1}, z_n]} (x_k - x_{k-1})$.

Für beliebige μ_n, die die obigen Forderungen erfüllen, ist diese Bedingung zu ersetzen durch:

$$\max \frac{x_k - x_{k-1}}{\mu_k} \sim \min \frac{x_k - x_{k-1}}{\mu_k} \tag{17}$$

Genauer gilt:

Satz 12: *Es sei*

(I) *$N(z_{n-1}) \sim N(z_n)$ für $n \to \infty$,*

(II) *ausgenommen auf einer Folge von Intervallen* $[z_{n_t-1}, z_{n_t}]$, *für die* $\sum_{t=1}^{m} (N(z_{n_t}) - N(z_{n_t-1})) = o(N(z_{n_m}))$, *gelte die Relation*

$$\max \frac{x_k - x_{k-1}}{\mu_k} \sim \min \frac{x_k - x_{k-1}}{\mu_k},$$

$$(x_{k-1} \vee x_k \in [z_{n-1}, z_n])$$

(III) *es sei entweder* a) $\mu_k = O(1)$, $\frac{z_n - z_{n-1}}{Z_n} \to \infty$

oder b) $\mu_k = o(1)$, $\frac{z_n - z_{n-1}}{Z_n} \geqq K > 0$,

wo $Z_n = \min_{x_{k-1} \vee x_k \in [z_{n-1}, z_n]} \frac{x_k - x_{k-1}}{\mu_k}$ *gesetzt wurde.*

Dann ist die Folge $\{x_k\}$ (M, μ_n)*-gleichverteilt mod* Δ.

Der Beweis verläuft ganz analog zum Fall $\mu_n \equiv 1$. (Vgl. [6]).

Beispiele

1. Für den Fall $\mu_n \equiv 1$ wurde Satz 10 von *J. F. Koksma* bewiesen. ([5], S. 88. Vgl. auch [8], S. 72.)

Man zeigt leicht, daß $a\,x^\sigma$ für reelles $a > 0$ und $0 < \sigma < 1$ und $a(\log x)^\sigma$ für reelles $a > 0$ und $\sigma > 1$ gleichverteilt sind. Die Funktion ${}^a\log x$ besitzt die untere bzw. obere Verteilungsfunktion $\omega(\gamma) = \frac{a^\gamma - 1}{a - 1}$ und $\Omega(\gamma) = \frac{1 - a^{-\gamma}}{1 - a^{-1}}$, $(a > 1)$, während $(\log x)^\sigma$ für $0 < \sigma < 1$ die Verteilungsfunktionen

$$\omega(\gamma) = 0 \ (0 \leqq \gamma < 1) \quad \text{und} \quad \Omega(0) = 0$$
$$\omega(1) = 1 \qquad\qquad \Omega(\gamma) = 1 \ (0 < \gamma \leqq 1)$$

besitzt.

2. Wir haben bei Satz 3 gezeigt:

$$(M, 1) \subseteq (M, \frac{1}{n}) \subseteq (M, \frac{1}{n \log n}) \subseteq \cdots$$

Man zeigt nun leicht (vgl. Satz 4), daß

$(M, \frac{1}{n \log n \ldots \log_{k-1} n})$ äquivalent ist mit $(M, \frac{1}{n \log n \ldots \log_{k-1} n (\log_k n)^\sigma}$ für $0 \leqq \sigma < 1$ und $k = 1, 2, \ldots$ $(\log_0 n = n)$, d. h. eine Folge besitzt

genau dann eine Verteilungsfunktion bezüglich des ersten Mittels, wenn sie eine bezüglich des zweiten Mittels besitzt; und beide sind gleich.

Besitzt eine Folge jedoch bezüglich des einen Mittels keine Verteilungsfunktion, dann natürlich auch nicht bezüglich des anderen; die entsprechenden oberen und unteren Verteilungsfunktionen müssen aber keineswegs übereinstimmen.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion $\log x$ bezüglich der Mittel $(M, \frac{1}{n^\sigma})$, $0 < \sigma < 1$.

Hier ist $N(x) = \sum_{n<e^x} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{e^{x(1-\sigma)}}{1-\sigma} + O(1)$.

Daraus ergibt sich nach Satz 10:

$$\omega(\gamma) = \frac{e^{(1-\sigma)\gamma} - 1}{e^{1-\sigma} - 1}, \quad \Omega(\gamma) = \frac{1 - e^{(\sigma-1)\gamma}}{1 - e^{\sigma-1}}.$$

Also anschaulich gesprochen: Läßt man σ kontinuierlich gegen 1 gehen, dann nähern sich $\omega(\gamma)$, $\Omega(\gamma)$ stetig einer gemeinsamen Grenzfunktion $z(\gamma) = \gamma$, der $(M, 1/n)$-Verteilungsfunktion von $\log x$ (siehe Satz 8).

Satz 13: *Besitzt* $f(x)$ $\omega(\gamma)$ *und* $\Omega(\gamma)$ *als* $(M, 1)$-*Verteilungsfunktionen und erfüllt* $f(x)$ *die Bedingungen des Satzes* 10, *dann besitzen*

$f(\log x)$ $\omega(\gamma)$, $\Omega(\gamma)$ *als* $(M, \frac{1}{n})$-*Verteilungsfunktionen*,

$f(\log_2 x)$ $\omega(\gamma)$, $\Omega(\gamma)$ *als* $(M, \frac{1}{n \log n})$-*Verteilungsfunktionen*,

. . . . . .

$f(\log_k x)$ $\omega(\gamma)$, $\Omega(\gamma)$ *als* $(M, \frac{1}{n \log n \ldots \log_{k-1} n})$-*Verteilungsfunktionen.*

Zum Beweis bemerken wir, daß die Umkehrfunktion von $f(\log_k x)$ gleich $e_k(F(x))$ ist, wenn $e_k(x)$ die Umkehrfunktion von $\log_k x$ und $F(x)$ die von $f(x)$ ist.

Es ist also

$$\sum_{n<e_k(F(x))} \frac{1}{n \log n \ldots \log_{k-1} n} = F(x) + O(1) = \sum_{n<F(x)} 1 + O(1)$$

und damit ist bereits alles gezeigt.

Aus der Tatsache, daß $\log x$ keine $(M, 1)$-Verteilungsfunktion besitzt, daß es aber $(M, \frac{1}{n})$-gleichverteilt ist, und dem eben Gezeigten schließen wir:

$$(M, 1) \subset (M, \frac{1}{n}) \subset (M, \frac{1}{n \log n}) \subset \dots$$

3. $\{p_k\}$ sei die Folge der Primzahlen. Wir zeigen

Satz 14: (s. [10]). *Die Folge* $\{\log_{n+1} p_k - [\log_{n+1} p_k]\}$ *hat dieselbe untere bzw. obere* $(M, \frac{1}{\nu \log \nu \dots \log_{n-1} \nu})$-*Verteilungsfunktion wie die Funktion* $\log_{n+1} x$.

Um Satz 10 anwenden zu können, definieren wir $\log_{n+1} p_x$ als stetige, monoton wachsende Funktion folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \log_{n+1} p_x &= \log_{n+1} p_k \qquad (x = k = 1, 2, \dots) \\ &= \text{linear} \qquad\qquad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Ist $\log_{n+1} p_x \leqq \varrho$, dann ist $p_x \leqq e_{n+1}(\varrho)$

$$(e_{n+1}(x) = e_1(e_n(x)),\ e_1(x) = e^x).$$

Es ist also

$$p_k\left(1 + O\left(\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k}\right)\right) \leqq e_{n+1}(\varrho) \to p_k \leqq \frac{e_{n+1}(\varrho)}{1 + o(1)} \to k \sim \frac{e_{n+1}(\varrho)}{e_n(\varrho)}.$$

Damit ergibt sich

$$N(\varrho) = \log_n \left(\frac{e_{n+1}(\varrho)}{e_n(\varrho)} + o\left(\frac{e_{n+1}(\varrho)}{e_n(\varrho)}\right)\right) + O(1).$$

Nun ist $\log \left(\frac{e^x}{x} + o\left(\frac{e^x}{x}\right)\right) = x + O(\log x)$.

Weiters ist

$$\log (e^x + O(x) = \log e^x \left((1 + O\left(\frac{x}{e^x}\right)\right) = x + O(\log x).$$

Wir haben somit:

$$N(\varrho) = \log_n \left(\frac{e_{n+1}(\varrho)}{e_n(\varrho)} + o\left(\frac{e_{n+1}(\varrho)}{e_n(\varrho)}\right)\right) + O(1) =$$

$$= \log_{n-1} (e_n(\varrho) + O(e_{n-1}(\varrho)) = \dots = e^\varrho + O(\varrho).$$

Also gilt: $N(\varrho) = e^\varrho + O(\varrho)$.

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

4. Wir betrachten nun Mittel der Gestalt $(M, \frac{\log p_\nu}{p_\nu})$ und $(M, \frac{1}{p_\nu})$, wo $\{p_\nu\}$ die Folge der Primzahlen bedeutet.

Aus der Abschätzung ([3], S. 348)

$$\sum_{p_n \leq x} \frac{\log p_n}{p_n} = \log x + O(1)$$

und der Beziehung $(M, \frac{\log p_\nu}{p_\nu}) \supseteq (M, 1)$, schließen wir nach Satz 10, daß die Funktionen ϑx (ϑ irrational), $a\, x^\sigma (0 < \sigma < 1)$, $a\, (\log x)^\sigma$ $(\sigma > 0)$ und $a\, (\log\log x)^\sigma$ $(\sigma > 1)$ für positive ϑ und a $(M, \frac{\log p_\nu}{p_\nu})$-gleichverteilt sind.

Ganz speziell ergibt sich z. B.

$$\sum_{p_\nu \leq n} \frac{\log p_\nu}{p_\nu} e^{2\pi i q a (\log \nu)^\sigma} = o(\log n)$$

für beliebiges $\sigma > 0$.

Analog zeigt man mit Hilfe der Abschätzung ([3], S. 351)

$$\sum_{p_n \leq x} \frac{1}{p_n} = \log\log x + C + o(1),$$

daß die Funktionen ϑx (ϑ irrational), $a\, x^\sigma (0 < \sigma < 1)$, $a(\log x)^\sigma$ $(\sigma > 0)$, $a(\log\log x)^\sigma$ $(\sigma > 0)$ und $a(\log_3 x)^\sigma$ $(\sigma > 1)$ $(M, \frac{1}{p_n})$-gleichverteilt sind.

Wir zeigen jetzt einen Satz über $(M, \sigma_a(n))$-Verteilung.

$\sigma_a(n)$ bedeutet dabei wie üblich $\sum_{d/n} d^a$.

Satz 15: *$f(x)$ sei für $x \geqq 1$ reell, monoton wachsend, mit $f(x) \to \infty$, aber $f(x) = o(x)$ für $x \to \infty$.*

$F(y)$ sei die zu $y = f(x)$ inverse Funktion. Gilt für die reelle Zahl $\alpha > 1$

$$\frac{(F(\varrho+1))^{\alpha+1} - (F(\varrho))^{\alpha+1}}{(F(\varrho+1))^\alpha} \to \infty, \quad \frac{(F(\varrho+\gamma))^{\alpha+1} - (F(\varrho))^{\alpha+1}}{(F(\varrho+1))^{\alpha+1} - (F(\varrho))^{\alpha+1}} \to \psi_\alpha(\gamma)$$

und setzt man $\lim \left(\frac{F(\varrho)}{F(\varrho+\gamma)}\right)^{\alpha+1} = \chi_\alpha(\gamma)$, dann besitzt die Folge $\{f(n) - [f(n)]\}$ die oberen bzw. unteren $(M, \sigma_a(n))$-Verteilungsfunktionen

$$\Omega(\gamma) = 1 - \chi_a(\gamma)(1 - \psi_a(\gamma)),\ \omega(\gamma) = \psi_a(\gamma).$$

Beweis: $\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_a(\nu) = \frac{\zeta(a+1)}{a+1} \cdot n^{a+1} + O(n^a)$ $(a > 1)$ ([8], S. 43), wobei $\zeta(s)$ die Riemann'sche Zetafunktion bedeutet.

Es ist somit $\sum_{\nu < F(x)} \sigma_a(\nu) = \frac{\zeta(a+1)}{a+1} (F(x))^{a+1} + O((F(x))^a)$.

Sind unsere Voraussetzungen erfüllt, so zeigt man analog wie bei Satz 10, daß

$$M_n(\gamma) = \psi_a(\gamma) \frac{N(m_n)}{N(m_n + x_n)} + \frac{N(m_n + \lambda_n) - N(m_n)}{N(m_n + x_n)} + o(1),$$

wo $N(m) = (F(m))^{a+1}$ gesetzt wurde. Daraus folgt wie bei Satz 10 die Behauptung des Satzes.

Man verifiziert nun unmittelbar, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind, wenn $f(x) = a x^s$, $(0 < s < 1)$ oder $= a (\log x)^t$ $(t > 1)$ ist, und zwar für jedes $\alpha > 1$. Dabei ist $\chi_a(\gamma) \equiv 1$, $\psi_a(\gamma) = \gamma$.

Also: Die Funktionen $f(x) = a x^s$ $(0 < s < 1)$ und $f(x) = a (\log x)^t$ $(t > 1)$ sind $(M, \sigma_a(n)$-gleichverteilt. Nach dem *Weyl*'schen Kriterium ist das gleichbedeutend mit den Abschätzungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_a(\nu)\, e^{2\pi i q a \nu^s} = o(n^{a+1})$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_a(\nu)\, e^{2\pi i q a (\log \nu)^t} = o(n^{a+1})$$

für $0 < s < 1, t > 1$ und jedes $\alpha > 1$.

Das Verfahren $(M, \sigma_a(n))$ kann auch als Summierungsverfahren für Doppelfolgen aufgefaßt werden. Das geht aus der folgenden Gleichung hervor.

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_a(k)\, e^{2\pi i q f(k)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{d/k} d^a\Big) e^{2\pi i q f(k)} = \sum_{\substack{\mu \geq 1 \\ 1 \leq \mu\nu \leq n}} \sum_{\nu \geq 1} \mu^a \cdot 1 \cdot e^{2\pi i q f(\mu\nu)}.$$

So aufgefaßt, können wir sagen: Erfüllt $f(x)$ die Voraussetzungen von Satz 15, so ist die Folge $\{f(\mu\nu) - [f(\mu\nu)]\}$ in den Bereichen $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $1 \leqq x\, y \leqq n$ $(M, \mu^a \cdot 1)$-verteilt zu den angegebenen oberen und unteren Verteilungsfunktionen.

6. Es sei $\vartheta = \overline{\lim}\, \beta$ in

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = n \log n + (2C - 1)\, n + O(n^\beta),$$

wobei $\tau(n) = \sum_{d/n} 1$, die Summe der Teiler von n bedeutet. Man kann analog zu Satz 10 zeigen, daß die Funktionen

$$f(x) = x^\sigma \quad (0 < \sigma < 1 - \vartheta) \text{ und } f(x) = (\log x)^\tau \qquad (\tau > 1)$$

$(M, \tau(n))$-gleichverteilt sind.

Es ist also

$$\sum_{1 \le \nu < n} \tau(\nu)\, e^{2\pi i q \nu^\sigma} = o(n \log n) \qquad (0 < \sigma < 1 - \vartheta)$$

und

$$\sum_{1 \le \nu < n} \tau(\nu)\, e^{2\pi i q (\log \nu)^\tau} = o(n \log n) \qquad (\tau > 1).$$

7. Als letztes Beispiel dieser Art betrachten wir die Verteilung von monotonen Funktionen in den Kreissektoren $x \ge 0, y \ge 0, 0 \le x^2 + y^2 \le n$.

Satz 16: Ist $f(x) \ge 0$, *monoton wachsend, stetig, gilt* $f(x) \to \infty$ *aber* $f(x) = o(\sqrt{x})$ *und existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{F(\varrho)}{F(\varrho + \gamma)} = \chi(\gamma), \quad \lim_{\varrho \to \infty} \frac{F(\varrho + \gamma) - F(\varrho)}{F(\varrho + 1) - F(\varrho)} = \psi(\gamma)$$

für jedes $\gamma \in [0, 1]$, *dann hat die Funktion* $f(x^2 + y^2)$ *in den angegebenen Bereichen die* $(M, 1 \,.\, 1)$*-Verteilungsfunktionen*

$$\omega(\gamma) = \psi(\gamma); \quad \Omega(\gamma) = 1 - \chi(\gamma)\,(1 - \psi(\gamma)).$$

Oder anders ausgedrückt: $f(x)$ *hat* $\omega(\gamma)$ *bzw.* $\Omega(\gamma)$ *als* $(M, r(n))$*-Verteilungsfunktionen, wo* $r(n)$ *die Anzahl der Zerlegungen von* n *in zwei Quadrate* $x^2 + y^2$ *mit* $x \ge 0$, $y \ge 0$ *bedeutet.*

Der Beweis ergibt sich mittels Satz 10 sofort daraus, daß

$$\sum_{0 \le \nu < z} r(\nu) = \sum_{0 \le i^2 + j^2 < z} 1 = \frac{\pi}{4} z + O(\sqrt{z})$$

ist, wie man durch Vergleich mit den Flächen der entsprechenden Kreissektoren unmittelbar feststellt.

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn $f(x) = a\, x^\sigma$ $(0 < \sigma < \frac{1}{2})$ oder $f(x) = a\, (\log x)^\tau$ $(\tau > 1)$ ist.

Daraus folgen die Abschätzungen

$$\sum_{1 \le \nu < n} r(\nu)\, e^{2\pi i q a \nu^\sigma} = o(n) \qquad 0 < \sigma < \tfrac{1}{2}$$

und

$$\sum_{1 \le \nu < n} r(\nu)\, e^{2\pi i q a (\log \nu)^\tau} = o(n) \qquad \tau > 1.$$

IV. Gleichverteilung von Doppelfolgen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Verteilung mod 1 von Doppelfolgen in den Rechtecken $a \leqq x \leqq m$, $b \leqq y \leqq n$, wo a und b fest sind und m und n unbeschränkt wachsen. Wir unterscheiden zwei Fälle: Erstens, m und n streben unabhängig voneinander gegen Unendlich; zweitens, sie sind durch eine Relation miteinander verknüpft. Wir zeigen nun folgenden

Satz 17: *$f(x, y)$ sei für $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, definiert. Die Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} mögen existieren. $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ seien monoton in x und y. Ist dann jeder der Ausdrücke*

$$\int_1^m \frac{dx}{f_y(x, 1)}, \quad \int_1^m \frac{dx}{f_y(x, n)}, \quad \int_1^m \frac{f_x(x, 1)}{f_y(x, 1)}\, dx, \quad \int_1^m \frac{f_x(x, n)}{f_y(x, n)}\, dx, \quad \int_1^m \frac{f_y(1, y)}{f_x(1, y)}\, dy,$$

$$\int_1^n \frac{f_y(m, y)}{f_x(m, y)}\, dy, \quad \int_1^m \int_1^n f_x(x, y) \cdot f_y(x, y)\, dx\, dy, \quad f(1, n), \quad f(m, 1), \quad f(m, n)$$

gleich $o(mn)$, so ist $f(x, y)$ in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq m$, $1 \leqq y \leqq n$ gleichverteilt mod 1.

Beweis: Nach (12) ist

$$\sum_{k=2}^{m} \sum_{l=2}^{n} f(k, l) = \int_1^m \int_1^n f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^m \int_1^n (x - [x])\, f_x(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \int_1^m \int_1^n (y - [y])\, f_y(x, y)\, dx\, dy + \int_1^m \int_1^n (x - [x])\, (y - [y])\, f_{xy}(x, y)\, dx\, dy.$$

Ersetzt man darin $f(x, y)$ durch $e^{2\pi i q f(x, y)}$, so bekommt man

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} e^{2\pi i q f(k, l)} =$$

$$= \int_1^m \int_1^n e^{2\pi i q f(x, y)}\, dxdy + 2\pi i q \int_1^m \int_1^n (x - [x])\, f_x(x, y)\, e^{2\pi i q f(x, y)}\, dxdy$$

$$+ 2\pi i q \int_1^m \int_1^n (y - [y])\, f_y(x, y)\, e^{2\pi i q f(x, y)}\, dxdy +$$

$$+ 2\pi i q \int_1^m \int_1^n (x - [x])\, (y - [y])\, f_{xy}(x, y)\, e^{2\pi i q f(x, y)}\, dxdy +$$

$$+ (2\pi i q)^2 \int_1^m \int_1^n (x - [x])\, (y - [y])\, f_x(x, y)\, f_y(x, y)\, e^{2\pi i q f(x, y)}\, dxdy + o(mn) \tag{18}$$

Wir müssen nun die Ausdrücke auf der rechten Seite von (18) nach oben abschätzen.

$$2\pi iq \int_1^m \int_1^n e^{2\pi iq f(x,y)}\,dx\,dy = \int_1^m \int_1^n \frac{2\pi iq\, f_y(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}}{f_y(x,y)}\,dxdy =$$

$$= \int_1^m \left(\int_1^n \frac{1}{f_y(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} e^{2\pi iq f(x,y)}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^m \left(\frac{e^{2\pi iq f(x,y)}}{f_y(x,y)} \Big|_{y=1}^n - \int_1^n e^{2\pi iq f(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{f_y(x,y)}\,dy \right) dx =$$

$$= O\left(\int_1^m \frac{dx}{|f_y(x,1)|} + \int_1^m \frac{dx}{|f_y(x,n)|} \right) = o(mn).$$

$$2\pi iq \int_1^m \int_1^n (x-[x])\,(y-[y])\, f_{xy}(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}\,dxdy =$$

$$= O\left(\int_1^m \int_1^n f_{xy}(x,y)\,dxdy \right) = o(mn)$$

$$(2\pi iq)^2 \int_1^m \int_1^n (x-[x])\,(y-[y])\, f_x(x,y)\, f_y(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}\,dxdy =$$

$$= O\left(\int_1^m \int_1^n f_x(x,y)\, f_y(x,y)\,dx\,dy \right) = o(mn)$$

$$2\pi iq \int_1^m \int_1^n (x-[x])\, f_x(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^m \int_1^n \frac{(x-[x])\, f_x(x,y) \cdot 2\pi iq\, f_y(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}}{f_y(x,y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^m \int_1^n (x-[x]) \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} e^{2\pi iq f(x,y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^m (x-[x]) \left(\int_1^n \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} e^{2\pi iq f(x,y)}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^m (x-[x]) \left(\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} e^{2\pi iq f(x,y)} \Big|_{y=1}^n - \int_1^n e^{2\pi iq f(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\,dy \right) dx =$$

$$= O\left(\int_1^m \left(\left| \frac{f_x(x,1)}{f_y(x,1)} \right| + \left| \frac{f_x(x,n)}{f_y(x,n)} \right| \right) dx \right) = o(mn).$$

Ganz analog wird $\int_1^m \int_1^n (y-[y])\, f_y(x,y)\, e^{2\pi iq f(x,y)}\,dx\,dy$ abgeschätzt.

Wir haben somit gezeigt:

$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} e^{2\pi i q f(k,l)} = o(mn)$, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind. Und diese Abschätzung bedeutet, daß $f(x, y)$ in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq m$, $1 \leqq y \leqq n$ gleichverteilt mod 1 ist!

Nun ein einfacher Spezialfall:

$f(t)$ sei monoton wachsend, $f'(t)$ strebe monoton gegen Null, $t.f'(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Dann ist die Funktion $f(\alpha x + \beta y)$ in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq \alpha n$, $1 \leqq y \leqq bn$ gleichverteilt mod 1.

Beweis: $f_x(\alpha x + \beta y) = \alpha f'(\alpha x + \beta y)$, $f_y(\alpha x + \beta y) = \beta f'(\alpha x + \beta y)$, wo der Strich die Ableitung nach dem Argument $\alpha x + \beta y$ bedeuten soll. Wir müssen zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 17 erfüllt sind.

$$\int_1^{an} \frac{dx}{f_y(\alpha x + \beta)} = \int_1^{an} \frac{dx}{\beta f'(\alpha x + \beta)} = o\Big(\int_1^{an} (\alpha x + \beta)\, dx\Big) = o(n^2)$$

$$\int_1^{an} \frac{dx}{f_y(\alpha x + \beta n)} = o(n^2).$$

Jeder der Brüche $\frac{f_x(x, n)}{f_y(x, n)}, \ldots$ ist konstant, es ist also

$$\int_1^{an} \frac{f_x(x, n)}{f_y(x, n)}\, dx = o(n^2), \ \ldots \ \int_1^{an}\int_1^{bn} f_x(x, y)\, f_y(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_1^{an}\int_1^{bn} \alpha\beta (f'(\alpha x + \beta y))^2\, dx\, dy = o(n^2).$$

Damit ist bereits alles gezeigt.

Aus diesem Satz ergibt sich, daß u. a. die Funktionen

$$(\alpha x + \beta y)^\sigma \ (0 < \sigma < 1) \text{ und } \log^\tau(\alpha x + \beta y) \qquad (\tau > 1)$$

in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq \alpha n$, $1 \leqq y \leqq b n$ gleichverteilt mod 1 sind.

Wir betrachten nun den wichtigen Spezialfall $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Aus Satz 17 ergibt sich:

Satz 18: *$f_1(x)$ und $f_2(y)$ seien für $x \geqq 1$ bzw. $y \geqq 1$ stetig differenzierbar und monoton. Die Funktionen $f_1'(x)$, $f_2'(y)$, $\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$, $\frac{f_2'(y)}{f_2(y)}$ seien monoton.*

Ferner gelte

$$\int_1^{m} \frac{dx}{f_1(x)} = o(mn), \ \frac{1}{f_2'(m)} \int_1^{m} \frac{dx}{f_1(x)} = o(mn), \ \frac{f_2(n)}{f_2'(n)} \log f_1(m) = o(mn),$$

$$\frac{f_1(m)}{f_1'(m)} \log f_2(n) = o(mn), \ (f_1^2(m) - f_1^2(1))\,(f_2^2(n) - f_2^2(1)) = o(mn).$$

Dann ist $f_1(x) \cdot f_2(y)$ *in den Rechtecken* $1 \leqq x \leqq m$, $1 \leqq y \leqq n$ *gleichverteilt mod* 1.

Und nun noch einige Beispiele:

1. Es sei $f(x, y) = x^\sigma y^\tau$. m und n mögen unabhängig voneinander gegen unendlich streben. Es gilt:

$$x^\sigma y^\tau \text{ ist für } 0 < \sigma \leqq \tfrac{1}{2},\ 0 < \tau < \tfrac{1}{2};\ 0 < \sigma < \tfrac{1}{2},\ \tau = \tfrac{1}{2}$$

in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq m$, $1 \leqq y \leqq n$ gleichverteilt mod 1.

Beweis:

$$\int_1^m \frac{dx}{f_1(x)} = \int_1^m x^{-\sigma}\,dx \sim m^{1-\sigma} = o(mn)$$

$$\frac{1}{f_2'(n)} \int_1^m \frac{dy}{f_2(y)} \sim m^{1-\sigma}\, n^{1-\tau} = o(mn)$$

$$\frac{f_2(n)}{f_2'(n)} \log f_1(m) \sim n \log m^\sigma = o(mn)$$

$$\frac{f_1(m)}{f_1'(m)} \log f_2(n) \sim m \log n^\tau = o(mn)$$

$$(f_1^2(m) - f_1^2(1))\,(f_2^2(n) - f_2^2(1)) = (m^{2\sigma} - 1)\,(n^{2\tau} - 1) = o(mn).$$

2. $x^\sigma y^\tau$ ist für $0 < \sigma + \tau < 1$, $|\sigma| < 1$, $|\tau| < 1$ in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq an$, $1 \leqq y \leqq bn$ gleichverteilt mod 1.

Beweis:

$$\int_1^{an} x^{-\sigma}\,dx = O(n^{1-\sigma}) = o(n^2)$$

$$\frac{1}{\tau\, n^{\tau-1}} \int_1^{an} \frac{dx}{x^\sigma} = O(n^{2-(\sigma+\tau)}) = o(n^2)\ \ (\tau \neq 0).$$

Die Bedingungen $\dfrac{f_2(bn)}{f_2'(bn)} \log f_1(an) = o(n^2)$ und $\dfrac{f_1(an)}{f_1'(an)} \log f_2(bn) = o(n^2)$ sind klarerweise auch erfüllt. Ebenso $((an)^{2\sigma} - 1)\,((bn)^{2\tau} - 1) = o(n^2)$. Der Fall $\tau = 0$ wurde schon in Beispiel 1a) zu Satz 10 betrachtet. *Van der Corput* ([1]) bewies mit seiner „Fundamentalen Ungleichung": Ist $f(x + h, y) - f(x, y)$ in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq an$, $1 \leqq y \leqq bn$ gleichverteilt, dann ist auch $f(x, y)$ dort gleichverteilt. Es sei $0 < \sigma + \tau < 1$, $|\sigma| < 1$, $|\tau| < 1$, dann ist

$$(x+h)^{\sigma+1}\, y^\tau - x^{\sigma+1} y^\tau = (\sigma+1)\, x^\sigma y^\tau + \frac{h\,\sigma(\sigma+1)}{2}(x+\vartheta h)^{\sigma-1} y^\tau,\ 0 < \vartheta < 1.$$

Mit Hilfe von Satz 17 kann man zeigen, daß die rechts stehende Funktion gleichverteilt ist. Es ist also auch $x^{\sigma+1}\, y^{\tau}$ gleichverteilt.

Wendet man diesen Gedankengang wiederholt an, so ergibt sich: Ist $0 < \sigma + \tau < 1$, $|\sigma| < 1$, $|\tau| < 1$, so ist die Funktion $x^{\sigma+k}\, y^{\tau+l}$ für $k \geqq 0$, $l \geqq 0$ ganz, in den Rechtecken $1 \leqq x \leqq an$, $1 \leqq y \leqq bn$ gleichverteilt mod 1.

Literatur

[1] *Van der Corput*: Diophantische Ungleichungen I. Acta math. **56**, 373—456 (1931).

[2] *G. H. Hardy*: Divergent Series, Oxford 1949.

[3] *G. H. Hardy — E. M. Wright*: An Introduction to the Theory of Numbers, 3. Aufl., Oxford 1956.

[4] *E. Hlawka*: Folgen auf kompakten Räumen, Abh. math. Sem. Hamburg, **20**, 223—241 (1956).

[5] *J. F. Koksma*: Diophantische Approximationen, Berlin, 1936.

[6] *W. J. LeVeque*: On uniform distribution modulo a subdivision, Pacific Journ. Math. **3**, 757—771 (1953).

[7] *Ch. N. Moore*: Summable Series and Convergence Factors, New York 1938 (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXII).

[8] *G. Pólya — G. Szegö*: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925.

[9] *M. Tsuji*: On the uniform distribution of numbers mod 1, Journ. Math. Soc. Jap. **4**, 313—322 (1952).

[10] *A. Wintner*: On the cyclical distribution of the logarithms of the prime numbers, Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 65—68 (1935).

Zur Kinematik der Schlittenbewegung

Von

O. Bottema, Delft

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 21. August 1959)

1. Der Schlitten im Sinne von Carathéodory[1] ist ein ebener starrer Körper S, welcher auf einer horizontalen Ebene gleitet und welchem die Bedingung auferlegt wird, daß die Punkte einer in S festen Geraden l keine Geschwindigkeit in der Richtung von l haben; l ist die Verbindungslinie der Stützpunkte der Kufen des Schlittens. Die Symmetrieachse des Schlittens steht auf l im Punkte M senkrecht. Es wirken auf S keine anderen äußeren Kräfte als die Reibungskraft, welche in die Gerade l fällt und verhindert, daß eine Gleitung in Richtung von l stattfindet. Carathéodory hat die Bewegungsgleichungen von S in eleganter Weise integriert und die Bahnkurve von M näher untersucht. Wir zeigen im folgenden einige kinematische Eigenschaften des Systems S, wenn es die Schlittenbewegung ausführt, und betrachten dabei im besonderen die Krümmung der Bahnkurven seiner Punkte.

2. Wir geben erst eine Zusammenfassung der Carathéodoryschen Resultate. Ein in S festes Koordinatensystem (ξ, η) habe M als Ursprung, die ξ-Achse falle mit der Schlittenachse und somit die η-Achse mit l zusammen. Der Schwerpunkt G von S liege in $(a, 0)$, wobei $MG = a > 0$ sei. Die Masse von S sei m, das Trägheitsmoment um G werde mit J bezeichnet. Als charakteristisch für die Bewegung erweist sich die dimensionslose Größe $k^2 = 1 + J/ma^2 > 1$. Die Lage von S wird bestimmt durch die Koordinaten x, y von M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem OXY der festen Ebene und den Winkel ϑ zwischen OX und der ξ-Achse. Die (nichtholonome) Bedingung, welche ausdrückt, daß die Geschwindigkeit von M längs $M\xi$ fällt, lautet

---

[1] *C. Carathéodory*, Der Schlitten, Z. angew. Math. Mech. **13** (1933), 71—76.

$$-\dot{x}\sin\vartheta + \dot{y}\cos\vartheta = 0. \tag{1}$$

Zwei weitere Bewegungsgleichungen sind

$$\ddot{x}\cos\vartheta + \ddot{y}\sin\vartheta - a\,\dot{\vartheta}^2 = 0 \tag{2}$$

und

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 k^2 \dot{\vartheta}^2 = a^2 k^4 c^2, \tag{3}$$

wo c konstant ist.

Die erste sagt aus, daß die Komponente der Beschleunigung von G längs $G\xi$ verschwindet, die zweite, daß die kinetische Energie von S konstant ist.

Eliminiert man x und y aus (1), (2) und (3), dann ergibt sich (wenn nicht $\dot{\vartheta}$ identisch verschwindet) für ϑ die Gleichung

$$k^2\ddot{\vartheta}^2 = \dot{\vartheta}^2(k^2c^2 - \dot{\vartheta}^2), \tag{4}$$

welche bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten zu

$$\dot{\vartheta} = c\,k\cos\vartheta/k$$

führt, so daß man nach Einführung der neuen Variablen $\psi = \vartheta/k$

$$\dot{\psi} = c\cos\psi \tag{5}$$

und somit

$$\cos\psi = ch^{-1}\,ct \tag{6}$$

findet, falls für $t = 0$ $\psi = \vartheta = 0$ angenommen wird. Behält man weiterhin ψ als Parameter bei, dann ist

$$\omega = \dot{\vartheta} = k\,c\cos\psi,\ \dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = -c\,\omega\sin\psi \tag{7}$$

und

$$\dot{x} = a\,k^2\,c\sin\psi\cos k\,\psi,\ \dot{y} = a\,k^2\,c\sin\psi\sin k\,\psi. \tag{8}$$

Wenn Akzente Differentiationen nach ψ bezeichnen, dann hat man

$$x' = a\,k^2\,\mathrm{tg}\,\psi\cos k\,\psi,\ y' = a\,k^2\,\mathrm{tg}\,\psi\sin k\,\psi. \tag{9}$$

Wir können offenbar ohne Bedenken $c > 0$ voraussetzen; aus (6) geht hervor, daß ψ von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ wächst, wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ zunimmt; ω hat dabei immer dasselbe (positive) Vorzeichen. Für $t = 0$ ist $\omega = k\,c$, $\dot{\omega} = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$; die Bahnkurve $C(M)$ von M hat dann eine Spitze. Man kann weiter zeigen, daß sie zwei Asymptoten hat, die mit der X-Achse die Winkel $\pm\,k\,\pi/2$ einschließen. Die Gestalt der Bahnkurve hängt nur von k, ihre Größe von a ab. Der Krümmungsradius ist $ak\,\mathrm{tg}\,\psi$; der Pol P der Bewegung liegt in $\xi = 0$, $\eta = a\,k\,\mathrm{tg}\,\psi$. Für die Evolute $\overline{C}(M)$ der Bahnkurve $C(M)$ gilt

$$\bar{x}' = -a\,k\,\frac{\sin k\,\psi}{\cos^2\psi}, \quad \bar{y}' = a\,k\,\frac{\cos k\,\psi}{\cos^2\psi}$$

und ihr Krümmungsradius ist $a/\cos^2\psi$. Die Parametergleichungen von $C(M)$ könnte man durch Integration von (9) bestimmen; wir nehmen noch $x = y = 0$ für $t = 0$ und finden dann z. B. für $k = 3/2$, $k = 2$ und $k = 3$ die Abbildung 1, welche der Carathéodoryschen Arbeit entnommen ist.

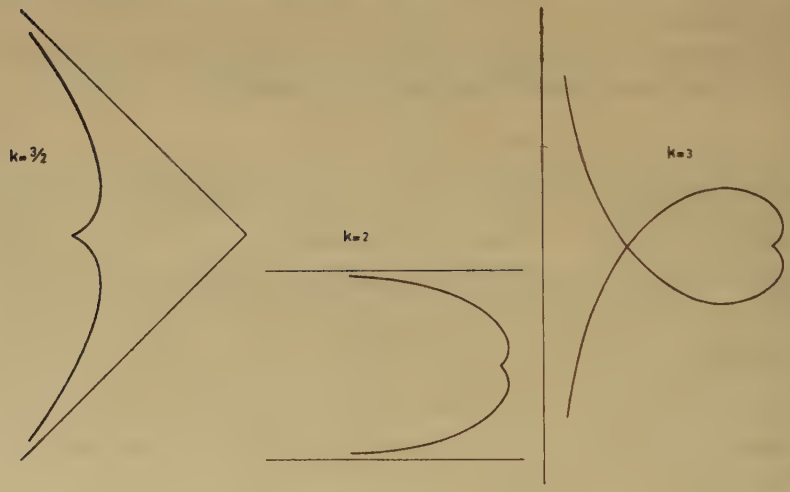

Abb. 1

3. Wir möchten noch bemerken, daß die Geschwindigkeit von M in der Richtung $M\xi$ den Wert $\dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta = a\,k^2\,c\sin\psi$ hat und also für $-\pi/2 < \psi < 0$ negativ ist. Während dieses Abschnitts eilt also M dem Punkt G voraus und dabei nimmt die Krümmung von $C(M)$ zu. Sobald M die Spitze passiert, findet eine Umkehr statt, jetzt geht G voran, die Krümmung nimmt ab und $C(M)$ strebt der Asymptote zu. Das stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß die Bewegung stabil ist, wenn bei der Fahrt des Schlittens der Schwerpunkt dem Stützpunkt vorausgeht, und nicht-stabil im entgegengesetzten Fall.

4. Für die folgenden kinematischen Betrachtungen untersuchen wir die Bewegung eines beliebigen Punktes $A(\xi, \eta)$ des bewegten Systems S. Wir haben

$$X = x + \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta$$

$$Y = y + \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta$$

und also

$$\dot{X} = ak^2c \sin\psi \cos k\psi - kc \cos\psi(\xi \sin k\psi + \eta \cos k\psi)$$

$$\dot{Y} = ak^2c \sin\psi \sin k\psi + kc \cos\psi(\xi \cos k\psi - \eta \sin k\psi)$$

Für die Geschwindigkeit v_A des Punktes A hat man somit

$$v_A^2 = k^2c^2\{(ak \sin\psi - \eta \cos\psi)^2 + \xi^2 \cos^2\psi\} =$$
$$= \tfrac{1}{2} k^2c^2\{(\xi^2 + \eta^2 - a^2k^2) \cos 2\psi - 2\,a\,k\,\eta \sin 2\psi + (\xi^2 + \eta^2 + a^2k^2)\}, \tag{10}$$

und es ist $d\,v_A^2/d\,\psi = 0$, wenn

$$(\xi^2 + \eta^2 - a^2k^2) \sin 2\psi + 2\,a\,k\,\eta \cos 2\psi = 0. \tag{11}$$

Daraus geht hervor: *Die Punkte* $A_1(ak, 0)$ *und* $A_1'(-ak, 0)$ *haben während der Bewegung eine konstante Geschwindigkeit,* welche für beide denselben Wert ak^2c hat.

Für einen bestimmten Wert von ψ gibt (11) die Punkte, für welche momentan die Tangentialbeschleunigung verschwindet; (11) ist also die Gleichung des Normalkreises. *Der Normalkreis hat den Mittelpunkt* $\xi = 0$, $\eta = -ak \cot 2\psi$ *und den Radius* $\dfrac{ak}{|\sin 2\psi|}$. Die Normalkreise für alle möglichen Werte von ψ bilden ein Kreisbüschel. Für $\psi = 0$ artet der Normalkreis zur ξ-Achse aus; für $\psi = \pm\dfrac{\pi}{4}$ ist es der Kreis mit dem Durchmesser $A_1 A_1'$. Jeder Kreis des Büschels ist Normalkreis für zwei verschiedene Lagen ψ_1 und ψ_2 des Systems; dabei ist $|\psi_1 - \psi_2| = \pi/2$. Jeder nicht auf der ξ-Achse gelegene Punkt hat zweimal eine extreme Geschwindigkeit; für $t = -\infty$ ist immer $v_A^2 = a^2k^4c^2$; ist $\eta > 0$, dann nimmt v_A^2 anfänglich zu und das erste Extrem ist ein Maximum; ist $\eta < 0$, so nimmt die Geschwindigkeit von A ab und das erste Extrem ist ein Minimum. Für einen Punkt auf der ξ-Achse und $\xi^2 > a^2k^2$ nimmt v_A^2 zu, bis für $t = 0$ das Maximum $\xi^2k^2c^2$ erreicht wird; ist $\xi^2 < a^2k^2$, so hat v_A^2 das Minimum $\xi^2k^2c^2$.

5. Aus (10) geht hervor, daß $v_A = 0$ für $\xi = 0$, $\eta = ak \operatorname{tg}\psi$, und wir finden neuerlich die Lage des Poles P. Die *Polkurve* im System S ist natürlich die η-Achse; in der festen Ebene ist es die Evolute $\overline{C}(M)$. Aus $P(0, ak \operatorname{tg}\psi)$ folgt, daß die *Polwechselgeschwindigkeit* $u = akc/\cos\psi$ ist. Für den Durchmesser d des Wendekreises hat man immer $d = u/\omega$,

also ist $d = a/\cos^2\psi$ und *die Gleichung des Wendekreises* W lautet deshalb

$$(\xi - \frac{a}{2\cos^2\psi})^2 + (\eta - a\,k\,\mathrm{tg}\,\psi)^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\psi}$$

oder

$$\cos^2\psi(\xi^2 + \eta^2 - a^2k^2) - a\,\xi - a\,k\,\eta\sin 2\psi + a^2k^2 = 0. \tag{12}$$

Um die Einhüllende von W zu bestimmen, differenzieren wir (12) nach ψ und erhalten

$$(\xi^2 + \eta^2 - a^2k^2)\sin 2\psi + 2\,a\,k\,\eta\cos 2\psi = 0, \tag{13}$$

was mit der Gleichung (11) des Normalkreises übereinstimmt. Aus (12) und (13) folgt

$$\xi\sin\psi + k\,\eta\cos\psi - a\,k^2\sin\psi = 0$$

und die Schnittpunkte dieser Gerade mit den Kreisen (12) und (13) sind der Pol $P(0, a\,k\,\mathrm{tg}\,\psi)$ und der Ballsche *Punkt* B mit den Koordinaten

$$\xi_B = \frac{a\,k^2}{\sin^2\psi + k^2\cos^2\psi},\quad \eta_B = \frac{a\,k(k^2-1)\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\psi + k^2\cos^2\psi} \tag{14}$$

Wir sehen also, daß der Ballsche Punkt bei unserer Bewegung der vom Pol verschiedene Schnittpunkt von Wendekreis und Normalkreis ist, d. h. *der Beschleunigungspol fällt mit dem* Ballschen *Punkt zusammen.*

6. Aus (14) erhält man durch Elimination von ψ

$$\{\xi - \tfrac{1}{2}\,a(k^2+1)\}^2 + \eta^2 = \tfrac{1}{4}\,a^2(k^2-1)^2. \tag{15}$$

D. h. *der Ort des Ballschen Punktes ist ein Kreis* K, *mit dem Mittelpunkt* $N = \{\frac{1}{2}\,a(k^2+1), 0\}$ *und dem Radius* $R = \frac{1}{2}\,a(k^2-1)$. Der Mittelpunkt liegt außerhalb des Wendekreises (12).

Wir haben also weiter:

Die Einhüllende der Wendekreise besteht aus der η*-Achse und dem Kreis* K. Oder auch: *die Wendekreise sind die Kreise, welche die* η*-Achse und von außen den Kreis* K *berühren.* Betrachtet man sämtliche Wendekreise, dann sieht man, daß sie das Gebiet F der (ξ, η)-Ebene überdecken, das durch

$$\{\xi - \tfrac{1}{2}\,a(k^2+1)\}^2 + \eta^2 > \tfrac{1}{4}\,a^2(k^2-1)^2,\ \xi > 0 \tag{16}$$

definiert ist. F besteht aus den Punkten der Halbebene $\xi > 0$, welche außerhalb des Kreises K liegen. Es enthält das Intervall MG, zwischen den Kufen und dem Schwerpunkt des Schlittens. Offenbar gehen durch

jeden Punkt von F zwei Wendekreise. Wir haben also folgende Sätze: *Die Bahnkurven von Punkten außerhalb F sind konvex; die Bahnkurven von Punkten innerhalb F haben zwei Wendepunkte.* Für die Randpunkte von F gilt offenbar: *Die Bahnkurven der Punkte der η-Achse haben eine Spitze, die Bahnkurven der Punkte des Kreises K* (wozu auch der Schwerpunkt G gehört) *haben einen Undulationspunkt,* d. h. einen Punkt mit hyperoskulierender Tangente.

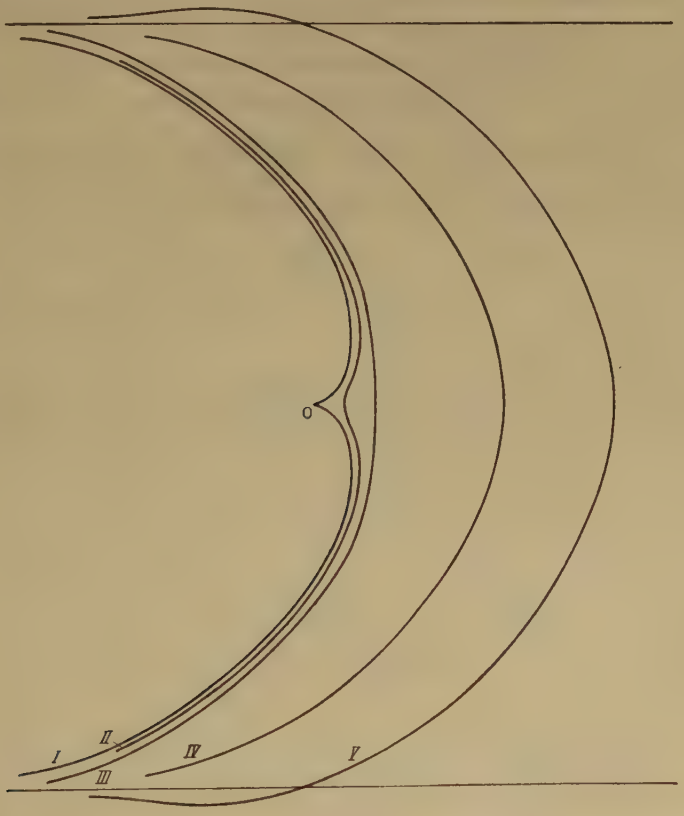

Abb. 2

Betrachten wir im besonderen die Punkte $(\xi, 0)$ auf der Achse des Schlittens, dann begegnen wir den charakteristischen Punkten $M(\xi = 0)$, $G(\xi = a)$ und $D(\xi = ak^2)$. Für Punkte diesseits von M und für solche zwischen G und D sind die Bahnen konvex; das gilt also auch für die Punkte A_1 und A_1' mit konstanter Geschwindigkeit. Für Punkte

zwischen M und G und für solche jenseits von D hat die Bahnkurve zwei Wendepunkte; die Bahnkurve von M hat eine Spitze, jene von G einen Undulationspunkt (Abb. 2). Die ξ-Achse hat nur dann reelle Schnittpunkte mit dem Wendekreis (12), wenn $\sin^2 2\psi \leq 1/k^2$, Ist also ψ_0 der kleinste spitze Winkel mit $\sin 2\psi_0 = 1/k$, dann befindet sich für die Lagen $\psi_0 < \psi < \pi/2 - \psi_0$ und für $\psi_0 - \pi/2 < \psi < -\psi_0$ kein Punkt der Achse in einem Wendepunkt seiner Bahn.

7. Der Winkel α, für welchen $\operatorname{tg}\alpha = \dot{\omega}/\omega^2$, wird in der Kinematik oft als „Beschleunigungswinkel" bezeichnet. Er gibt den Winkel an, welchen der Beschleunigungsvektor eines beliebigen Punktes A mit AP' bildet, wo P' den Beschleunigungspol bedeutet. Aus (7) folgt $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{k}\operatorname{tg}\psi$. Führt man statt ψ den Winkel α in (14) ein, dann ergibt sich für den Kreis $K(N; R)$ die Darstellung

$$\xi = \tfrac{1}{2}a(k^2+1) - R\cos 2\alpha, \quad \eta = -R\sin 2\alpha,$$

was übrigens auch aus der Lage des Beschleunigungspoles auf dem Wendekreis hervorgeht.

Man hat nämlich, wenn T der Mittelpunkt des Wendekreises W ist $\sphericalangle TPB = \alpha$ und also $\sphericalangle BNM = 2\alpha$ (vgl. Abb. 3 wo $k = 2$ und

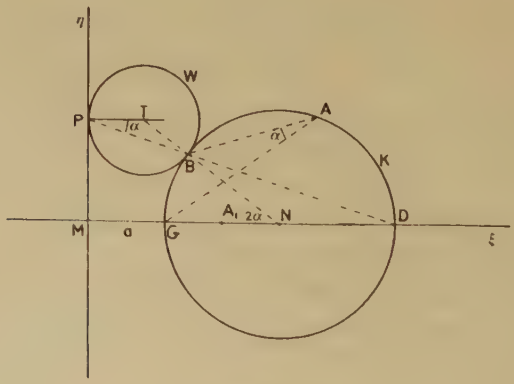

Abb. 3

$\psi > 0$ also $\alpha < 0$ ist). Ist A ein beliebiger Punkt auf K, dann ist $\sphericalangle BAG = \alpha$, d. h. *für jeden Punkt A des Kreises K geht während der Schlittenbewegung die Beschleunigung durch den Schwerpunkt G.*

Bemerkungen und Abschätzungen zur Induktion[1]

Von

L. Vietoris, Innsbruck

(Eingegangen am 7. September 1959)

Jakob Bernoulli[2] hat in seiner Ars conjectandi den nach ihm benannten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesen, dessen Fragestellung die folgende ist: In N-Versuchen einer bestimmten Art sei k-mal das Ergebnis a erschienen. Was kann man auf Grund dieser Erfahrung über die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens von a bei Versuchen dieser Art aussagen?

Wenn $k = 0$ oder $k = N$ ist, dann nennt man den gewünschten Schluß einen *Induktionsschluß*. Über ihn schreibt *Bertrand Russell*[3]: „Seit den Tagen von *Laplace* sind verschiedene Versuche gemacht worden, um zu zeigen, daß die wahrscheinliche Geltung eines Induktionsschlusses aus der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie folge. Heute ist man allgemein zur Überzeugung gekommen, daß diese Versuche sämtlich erfolglos gewesen sind und daß induktive Argumente überhaupt nur auf Grund irgendwelcher außerlogischen Eigentümlichkeiten der wirklichen Welt gelten können, die als solche den verschiedenen logisch möglichen Welten gegenübersteht, die von den Logikern betrachtet werden können."

---

[1] Wenn auch die folgenden Überlegungen von der Art, wie man die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet, weitgehend unabhängig sind, sei doch wegen der hier verwendeten Terminologie auf meinen Begründungsversuch hingewiesen:

„Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit", Monatsh. f. Math. **52** (1948), 55–85.

„Wie kann Wahrscheinlichkeit definiert werden?" Stud. gen. **4** (1951), 69–72.

„Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Dialectica **8** (1954), 37–47.

„Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit". Stud. gen. **9** (1956), S. 85–96.

[2] *Jakob Bernoulli*, Ars conjectandi 1713 (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften 107 und 108, insbes. 108, S. 94–107.

[3] *B. Russell*, Das menschliche Wissen. Übersetzt von W. Bloch, Holle-Verlag, Zürich, S. 339.

Dieser Ansicht kann ich, insoweit sie eine grundsätzliche Unmöglichkeit behauptet, nicht beipflichten. Dagegen gebe ich zu, daß sich gegen gewisse Überlegungen, mit denen man Induktionsschlüsse begründet oder begründet hat, gewichtige Einwände erheben lassen. Zwei von ihnen sind:

1. Es werden Gleichverteilungen angenommen, wo hiefür kein ausreichender Grund vorliegt, z. B. im *Laplace*schen Lösungsversuch des Induktionsproblems. Freilich wird diese Lösung von den meisten Statistikern heute nicht mehr angenommen und auch in anderen Fällen ist man vor ähnlichem Vorgehen auf der Hut.

2. Man kontraponiert Wahrscheinlichkeitsaussagen wie logische Implikationen. In der klassischen Logik sind der Satz „Wenn A, dann B" und der aus ihm durch Kontraposition hervorgehende Satz „Wenn nicht B, dann nicht A" gleichbedeutend. Das Entsprechende in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre, zu sagen, der Satz „Unter der Voraussetzung A ist B sehr wahrscheinlich" und der Satz „Unter der Voraussetzung nicht-B ist nicht-A sehr wahrscheinlich" seien gleichbedeutend. So wird tatsächlich geschlossen. Sehr häufig tritt dieser Schluß in der Form auf, daß man die Sätze „Unter der Voraussetzung A ist C sehr unwahrscheinlich" und „Unter der Voraussetzung C ist A sehr unwahrscheinlich" als gleichbedeutend ansieht.

Die Wahrscheinlichkeit von C unter der Voraussetzung A möge $w(A, C)$ heißen. Dann ist $w(A, C) = w(A, AC)$, wo AC den Durchschnitt von A und C bedeute. Nach der Kettenregel ist

$$w(C, A) = w(A, C)\,\frac{w(A)}{w(C)},$$

vorausgesetzt, daß sämtliche vorkommenden Wahrscheinlichkeiten definiert sind und $w(C) > 0$ ist. Wir wollen den Bruch $w(A)/w(C)$ den *Bayesschen Faktor* nennen. Ihn als 1 zu behandeln, ist durch nichts gerechtfertigt. Es geschieht aber häufig.

Beispiel: Wenn man mit der *Millot*schen Formel[4] oder nach *Clopper* und *Pearson*[5] Vertrauensgrenzen für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit ermittelt, geht man folgendermaßen vor:

---

[4] Vgl. *O. N. Anderson*, Einführung in die mathematische Statistik, Springer, Wien 1935, S. 110—116.

[5] Vgl. *B. L. van der Waerden*, Mathematische Statistik, Springer, Berlin 1957, S. 34—36.

Maria P. Geppert, Das Bayessche Rückschlußproblem. Deutsche Mathematik **7** (1942), S. 1—22.

Man hat in einem Spiel S N-mal gezogen (einen Versuch S N-mal ausgeführt) und dabei k-mal das Ergebnis a erhalten. Wir geben ein ε zwischen 0 und 1 vor und bestimmen p_1 und p_2 so, daß

$$(*)\ w(p = p_1, h_N \leqq \frac{k}{N}) = \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } (**)\ w(p = p_2, h_N \geqq \frac{k}{N}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wo h_N die relative Häufigkeit des Erscheinens von a in irgendwelchen N-Zügen (Versuchen) bedeute. p_1 und p_2 sind eindeutig bestimmt, und zwar ist wegen $\varepsilon < 1$ $0 \leqq p_2 < p_1 \leqq 1$. Daher ist

$$w(p \geqq p_1, h_N \leqq \frac{k}{N}) \leqq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } w(p \leqq p_2, h_N \geqq \frac{k}{N}) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

mithin

$$w(p \geqq p_1, h_N = \frac{k}{N}) \leqq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } w(p \leqq p_2, h_N = \frac{k}{N}) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$w(p \geqq p_1 \,.\vee.\, p \leqq p_2, h_N = \frac{k}{N}) \leqq \varepsilon.$$

ε ist so klein gewählt, daß wir bereit sind, das Risiko eines mit einer Wahrscheinlichkeit $\leqq \varepsilon$ eintretenden Irrtums einzugehen. Weil wir nun in unseren N ausgeführten Versuchen $h_N = k/N$ bekommen haben, verwerfen wir die Annahme, daß $p \geqq p_1$ oder $p \leqq p_2$ ist, d. h. wir nehmen an, daß $p_2 < p < p_1$ ist. Es scheint die Ansicht ziemlich allgemein verbreitet zu sein, daß dann die Irrtumswahrscheinlichkeit — unter Zugrundelegung eines hinreichend allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriffes — tatsächlich $\leqq \varepsilon$ ist, d. h. daß ein Statistiker, der in allen derartigen Fällen so vorgeht, dabei durchschnittlich in $M\,\varepsilon$ von M-Fällen irren wird. Wenigstens kann man das auch bei den besten Autoren lesen. Man behauptet also

$$(***)\ w(h_N = \frac{k}{N}, p \leqq p_2 \,.\vee.\, p \geqq p_1) \leqq w(p \leqq p_2 \,.\vee.\, p \geqq p_1, h_N = \frac{k}{N}),$$

d. h. man tut so, als ob

$$w(p \leqq p_2 \,.\vee.\, p \geqq p_1)/w(h_N = \frac{k}{N}) \leqq 1$$

wäre. Welch ein Optimismus dahinter steckt, wollen wir an dem Sonderfall $h_N = 1$ zeigen. In diesem Fall wird (*) trivial, während (**) die Form[6]

[6] Sie ist ein Sonderfall der *Clopper-Pearson*schen Formel.

$$w(p = p_2, h_N = 1) = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d. h. } p_2^N = \frac{\varepsilon}{2}$$

annimmt. Für das so bestimmte p_2 ist also

$$w(p \leqq p_2, h_N = 1) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hat man nun in N-Versuchen immer das Ergebnis a, d. h. $h_N = 1$ bekommen, dann verwirft man die Annahme $p \leqq p_2 = (\varepsilon/2)^{1/N}$. Der vernachlässigte Faktor wird hier

$$w(p \leqq p_2)/w(h_N = 1).$$

Kennt man eine „Ausgangsverteilung" $g(p)$, dann kann man ihn leicht berechnen. Dann ist

$$w(p \leqq p_2) = \int_0^{p_2} g(x)\,dx \text{ von } N \text{ unabhängig.}$$

$$w(h_N = 1) = \int_0^1 x^N g(x)\,dx = \int_0^{1-\vartheta} x^N g(x)\,dx + \int_{1-\vartheta}^1 x^N g(x)\,dx <$$

$$< (1-\vartheta)^N \int_0^1 g(x)\,dx + \int_{1-\vartheta}^1 g(x)\,dx < (1-\vartheta)^N + \int_{1-\vartheta}^1 g(x)\,dx \text{ mit } 0 < \vartheta < 1.$$

Wegen der Stetigkeit des Integrals ist der zweite Summand bei hinreichend kleinem ϑ beliebig klein. Ist dann ϑ gewählt, so kann der erste beliebig klein gemacht werden, indem man N hinreichend groß nimmt. Also ist für jede Ausgangsverteilung $\lim_{N\to\infty} w(h_N = 1) = 0$, mithin

$$\lim_{N\to\infty} \frac{w(p \leqq p_2)}{w(h_N = 1)} = \infty.$$

Auch wenn man es dahingestellt sein läßt, ob es immer eine — im Allgemeinen unbekannte — Verteilung gibt, die als Ausgangsverteilung genommen werden dürfte, wird man der Formel (***) auf Grund dieser Feststellung sehr skeptisch gegenüberstehen.

Manche nehmen, um eine solche Kontraposition von Wahrscheinlichkeitsaussagen zu rechtfertigen, ihre Zuflucht zum *Cournot*schen Lemma[7], nach welchem sehr kleine Wahrscheinlichkeiten wie Null behandelt werden. M. E. hat es aber nur dort eine Berechtigung, wo das Ergebnis einer fertigen Rechnung einen praktischen Entschluß

[7] *O. N. Anderson*, obiges Buch, S. 309, und
O. N. Anderson, Die Begründung des Gesetzes der großen Zahlen und die Umkehrung des Theorems von Bernoulli. Dialectica 3 (1949), S. 65—77.

rechtfertigen soll, nicht aber hier, wo es dazu dient, den Bayesschen Faktor zu ignorieren ohne Rücksicht darauf, ob und wie er definiert werden und welche Größenordnung er haben kann.

Trotzdem sehe ich die Lage nicht so hoffnungslos wie *Russell*. Denn sein Argument von den „außerlogischen Eigentümlichkeiten" scheint mir auf unsere Welt nicht zuzutreffen. Unsere Welt *hat* logisch nicht notwendige Eigenschaften, die gerade im Gebiet der Wahrscheinlichkeit eine grundlegende Rolle spielen. Solche sind die folgenden:

a) Es gibt materielle Dinge, die eine Zeitlang, mitunter sehr lang, bestehen und von uns immer wieder identifiziert werden können; ich kann z. B. mit einem und demselben Würfel viele Würfe ausführen, ich kann einen und denselben Versuch oft machen.

b) Die sich dabei ergebenden relativen Häufigkeiten gewisser, identifizierbarer Versuchsergebnisse hangen von den Eigenschaften der Dinge ab, die ich *primäre* Eigenschaften[8] nenne. Das sind die Eigenschaften, in deren Definition nicht von relativen Häufigkeiten die Rede ist, wie etwa Gestalt, Gewicht, Lage des Schwerpunktes, elektrische und magnetische Eigenschaften der Körper. Von diesen primären Eigenschaften eines bestimmten, vielleicht falschen Würfels hängt z. B. die relative Häufigkeit der 6 beim Würfeln mit diesem Würfel ab. Ähnlich verursachen gewisse primäre Eigenschaften des menschlichen Organismus, daß ungefähr gleichviel Knaben wie Mädchen geboren werden.

c) Schließlich sind sämtliche Axiome, durch die wir die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Wirklichkeit in Zusammenhang bringen und die eine Anwendung auf die Wirklichkeit möglich machen, Feststellungen logisch nicht notwendiger Eigenschaften unserer Welt.

Ohne Verwendung dieser Eigenschaften gäbe es auch keine mathematische Statistik. Ich will hier folgendes zeigen:

Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert eine Begründung des Induktionsschlusses, und zwar wird das Grundsätzliche hiefür durch bekannte Sätze, insbesondere den *Bernoulli*schen geleistet. Lediglich die bekannten einschlägigen Abschätzungen lassen an Schärfe zu wünschen übrig. Diese zu verbessern, ist eine Aufgabe der folgenden Ausführungen.

Dabei will ich die allgemeine Fragestellung Bernoullis, wo k nicht gerade 0 oder N sein muß, mitbehandeln. Man kann hier von *Induktion im weiteren Sinn* sprechen.

---

[8] Vgl. die in [1] zuletzt genannte Arbeit, S. 92.

Dazu wollen wir zwei Wahrscheinlichkeitsbegriffe unterscheiden. Zunächst ist jede Wahrscheinlichkeit eine physikalische Konstante, z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer bestimmten Urne eine weiße Kugel zu ziehen, eine Konstante dieser Urne, die Wahrscheinlichkeit mit einem bestimmten Würfel 6 zu werfen, eine Konstante dieses Würfels. Wie wir zu diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff gekommen sind, ist hier gleichgültig. Ich will ihn zum Unterschied von dem sofort zu erklärenden zweiten Begriff den „Möglichkeitsgrad" nennen. Er bewertet die Möglichkeit, etwa aus der genannten Urne eine weiße Kugel zu ziehen. Ein solcher Möglichkeitsgrad ist auch die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt unter allen Geburten.

Betrachten wir nun folgendes Beispiel[9]: In einer Urne seien 1000 Kugeln, welche abgesehen von ihrer Farbe ununterscheidbar sind. 800 seien weiß, 200 schwarz. Die Wahrscheinlichkeit, d. h. der Möglichkeitsgrad, aus dieser Urne eine weiße Kugel zu ziehen, sei also 0,8. Ich habe eben aus U eine Kugel gezogen, aber ihre Farbe noch nicht festgestellt. Hat die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel weiß ist, einen Sinn? Sicher nicht, solange ich Wahrscheinlichkeit im obigen Sinn verstehe. Denn es ist schon entschieden, ob die Kugel weiß ist oder schwarz. Die Wahrscheinlichkeit 0,8 bezieht sich nur auf die Urne und auf die Gesamtheit der aus ihr möglichen Züge, aber nicht auf einen einzelnen Zug[10]. Trotzdem werde ich zu der Aussage „die gezogene Kugel ist weiß" ein viel größeres Vertrauen haben, als zur gegenteiligen Aussage. Es ist sinnvoll, als Maß der Berechtigung dieses Vertrauens die Zahl 0,8 zu nehmen, ja es ist geradezu der Zweck der Wahrscheinlichkeitsurteile, in dieser Weise auf den Einzelfall angewendet zu werden. Wir wollen dieses Maß „Beglaubigungsgrad" nennen[11].

Wir definieren also folgendermaßen:

Hat in einem Spiel S das Merkmal a die Wahrscheinlichkeit p, dann sagen wir, die Aussage, daß bei einem bestimmten Zug von S a erschienen ist oder erscheinen wird, werde durch die Voraussetzung, daß aus S gezogen wird, mit dem *Beglaubigungsgrad* p beglaubigt.

---

[9] Vgl. *Th. Erismann*, Wahrscheinlichkeit im Sein und Denken. Sexl, Wien 1954, S. 12.

[10] Dies ist auch die Ansicht Erismanns; a. a. O.

[11] Einen Wahrscheinlichkeitsbegriff dieser Art hat schon *A. de Morgan*, Formal Logic 1847.

Dieser Begriff ermöglicht auch in einer deterministischen Welt sinnvolle Aussagen über Einzelfälle.

Nun mögen beliebig viele Spiele S_i vorliegen, wo der Index i auch eine nicht abzählbare Menge durchlaufen kann. In jedem S_i komme das Merkmal a vor und habe dort die Wahrscheinlichkeit (im Sinn von Möglichkeit) w_i. Es sei für alle i $P < w_i < Q$. Das sei mir bekannt. Nun ziehe ich nach Belieben aus einem der S_i, ohne festzustellen, welches Merkmal ich gezogen habe. Solange nicht für jedes S_i eine Wahrscheinlichkeit, von mir gewählt zu werden, definiert ist, ist noch keine Wahrscheinlichkeit, dabei das Merkmal a zu ziehen, definiert. Weil aber für jedes i $P < w_i < Q$ ist, werde ich sagen dürfen, die Aussage, ich habe bei meinem Zug das Merkmal a gezogen, sei mit einem Grad g beglaubigt, für den $P < g < Q$ gilt. Mit anderen Worten: Ich habe für diese Aussage keine bestimmte Beglaubigung, sondern eine Strecke $P < g < Q$ von Beglaubigungsgraden.

Es ist wichtig festzuhalten, daß jede solche Beglaubigung, gleichgültig, ob sie durch eine Zahl oder eine Menge von Zahlen gegeben ist, eine Beziehung zwischen den beglaubigenden Voraussetzungen und der beglaubigten Aussage ist. Wir wollen die Aussage „Die Voraussetzung C beglaubigt die Aussage D mit dem Grad g" so schreiben:

$$\text{bgl}\,(C, D) = g, \tag{1}$$

wofür im Falle einer Strecke von Beglaubigungsgraden eine Ungleichung

$$P < \text{bgl}\,(C, D) < Q \tag{1'}$$

tritt.

Wir wenden diese Begriffe auf die Induktion an:

Wir haben aus einem Spiel A N-mal gezogen und dabei k-mal das Merkmal b bekommen. Die uns unbekannte Wahrscheinlichkeit von b in A sei q. Nach der Ungleichung von *Bienaimé* und *Tschebyscheff* ist die Wahrscheinlichkeit (im Sinn von Möglichkeitsgrad) dafür, daß die relative Häufigkeit h_N von b in N Zügen sich von q um nicht mehr als ε unterscheidet

$$w(\,|\,h_N - q\,| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \frac{q(1-q)}{N\varepsilon^2} \geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}. \tag{2}$$

Die Feststellung, ob in N-Zügen von A $|\,h_N - q\,| \leqq \varepsilon$ ausfällt, ist ein Spiel S_A in dem das Merkmal „$|\,h_N - q\,| \leqq \varepsilon$" vorkommt und dort eine Wahrscheinlichkeit $\geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$ hat. Der in der Definition des

Beglaubigungsgrades vorkommende Parameter i heißt hier A. Ist das Spiel gewählt und sind N-Züge aus ihm gemacht, dann sind q und $h_N = Q$ feste Zahlen, womit schon entschieden ist, ob $|h_N - q| \leqq \varepsilon$ ist oder nicht. Eine Wahrscheinlichkeitsaussage hierüber ist also nicht möglich, auch wenn q, wie wir voraussetzen wollen, unbekannt ist. Dagegen können wir die Beglaubigungsaussage

$$\text{bgl}\,(h_N = Q, |Q - q| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} \tag{3}$$

machen. Das heißt in Worten: Die Tatsache, daß das Merkmal b im Spiel A bei N-Zügen NQ-mal erschienen ist, beglaubigt die Aussage, daß sich die Wahrscheinlichkeit des Merkmals b im Spiel A von Q um nicht mehr als ε unterscheidet, mit einem Grad $\geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$. Wichtig ist, festzuhalten, daß diese Beglaubigung von diesen N Zügen geliefert wird. Eine andere Reihe von Zügen aus A wird eine andere Aussage über q mit einem Allgemeinen anderen Grad beglaubigen, etwa

$$\text{bgl}\,(h_M = R, |R - q| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \frac{1}{4M\varepsilon^2}.$$

Beglaubigungsgrade sind immer relativ. Wenn selbstverständlich ist, welches die beglaubigende Tatsache oder Annahme ist, kann auf ihre Angabe verzichtet werden; z. B. werden wir (3) auch kürzer so schreiben:

$$\text{bgl}\,(|h_N - q| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Ist $h_N = 0$ oder $h_N = 1$, dann liegt Induktion im engeren Sinn vor. Dann nimmt 3 die Form an:

$$\text{bgl}\,(h_N = 1, q \geqq 1 - \varepsilon) \geqq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}. \tag{5}$$

3 gibt eine Strecke von Beglaubigungsgraden. Die triviale obere Schranke ist 1. Die untere Schranke geht mit wachsendem N gegen 1. Damit ist grundsätzlich gezeigt, daß auf die Wahrscheinlichkeitstheorie Induktionsschlüsse gegründet werden können. Daß die mit der Bienaimé-Tschebyscheffschen Ungleichung erlangten Abschätzungen sehr roh sind, ändert daran nichts. Es sind erheblich bessere Abschätzungen bekannt, die wir noch weiter verschärfen wollen. Die obige Abschätzung ist nur dadurch ausgezeichnet, daß sie am einfachsten hergeleitet werden kann.

Hier ist folgender Einwand zu erwarten: „Wenn die vorstehenden Überlegungen richtig sind, müssen sie auch gelten, wenn das oben als Parameter eingehende Spiel A eine geeignete Menge von Spielen durchläuft und durch eine Vorschrift gewählt wird, durch die jedem A eine Wahrscheinlichkeit, gewählt zu werden, zugewiesen wird. Dadurch wird für das q eine Verteilung $\varphi(q)$ gegeben, welche die Anwendung der *Bayes*schen Regel ermöglicht. Damit errechnet sich die Wahrscheinlichkeit, daß N die relative Häufigkeit $h_N = Q$ liefernde Züge aus einem A sind, für das $Q - \varepsilon \leqq q \leqq Q + \varepsilon$ gilt, als

$$w(Q-\varepsilon \leqq q \leqq Q+\varepsilon) = \int_{Q-\varepsilon}^{Q+\varepsilon} \varphi(t)\, t^{NQ}(1-t)^{N(1-Q)}\, dt \Big/ \int_0^1 \varphi(t)\, t^{NQ}(1-t)^{N(1-Q)}\, dt = W \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{bgl}\,(h_N = Q, \mid Q - q \mid \leqq \varepsilon) = W. \tag{7}$$

Nun kann offenbar $\varphi(t)$ so gewählt werden, daß $W < 1 - \dfrac{1}{4N\varepsilon^2}$ wird im Widerspruch mit 3."

So der Einwand. Gegen ihn ist nur das Eine zu sagen, daß die linke Seite in 7 nicht richtig bezeichnet ist. Die Aussage $\mid Q - q \mid \leqq \varepsilon$ wird nämlich nicht durch „$h_N = Q$" allein beglaubigt, sondern nur zusammen mit der vorausgesetzten Ausgangsverteilung. Als beglaubigende Annahme müßte also in 7 etwa stehen „Ausgangsverteilung $\varphi(q)$ und $h_N = Q$". Damit verschwindet der Widerspruch. Man ersieht hieraus, wie wichtig es ist, den Beglaubigungsgrad als Maß einer Beziehung zwischen einer Aussage und einer sie beglaubigenden Annahme oder Tatsache aufzufassen.

Anstelle der Bienaimé-Tschebyscheffschen Abschätzung verwendet man gewöhnlich die *Laplace*sche Näherung für die *Bernoulli*sche Verteilung. Nach ihr ist bei großem Npq näherungsweise

$$w(\mid h_N - q \mid \leqq \varepsilon) = \Theta\left(\sqrt{\frac{N}{2pq}}\,\varepsilon\right) \geqq \Theta(\sqrt{2N}\,\varepsilon), \text{ wo } p = 1 - q \tag{8}$$

und

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{9}$$

ist. Diese Näherung ist aber nur dann gut, wenn q nicht nahe bei 0 oder 1 liegt. In diesen Fällen greift man deshalb zur *Poisson*schen Näherung. Was wir aber hier brauchen, ist eine möglichst scharfe, für alle q gleichmäßig geltende Abschätzung.

Hier kommt zunächst die Abschätzung in Frage, welche *Jakob Bernoulli*[2] zum Beweis des nach ihm benannten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat. Sie enthält zwar in der von *Bernoulli* gegebenen Gestalt das q, läßt sich aber von ihm befreien. *J. V. Uspensky*[12] hat dem Bernoullischen Beweis eine moderne Darstellung gegeben und dabei *Bernoullis* Abschätzung erheblich verschärft, sowie von q unabhängig gemacht. In unserer Schreibweise läßt sich die Abschätzung *Uspenskys* so schreiben:

Hat das Merkmal b im Spiel S die Wahrscheinlichkeit q, dann ist für $\varepsilon > 0$ und $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$w(|h_N - q| < \varepsilon) > 1 - \exp \frac{-N\varepsilon^2(1 - \frac{1}{N\varepsilon})}{1+\varepsilon}. \tag{10}$$

Ich behaupte nun — was für nicht zu großes ε und nicht zu kleines N, d. i. in den meisten praktisch vorkommenden Fällen, erheblich schärfer als 10 ist —:

Hat das Merkmal b im Spiel S die Wahrscheinlichkeit q, dann ist für $\varepsilon > 0$ und $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$w(|h_N - q| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \exp \frac{-2\,[N\varepsilon]\,[N\varepsilon - 1]\,(N+1)}{(N + [N\varepsilon])^2}, \tag{11}$$

wo $[x]$ das „größte Ganze von x" bedeutet. Aus 11 ergibt sich unmittelbar:

$$w(|h_N - q| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \exp \frac{-2N\varepsilon^2(1 - \frac{1}{N\varepsilon})(1 - \frac{2}{N\varepsilon})(1 + \frac{1}{N})}{(1+\varepsilon)^2}, \tag{11'}$$

was etwas weniger scharf ist, aber den Vergleich mit 10 erleichtert und für manche Zwecke bequemer ist.

Beweis von 11: Für $q = 0$ oder $q = 1$ ist $w(h_N = q) = 1$, 11 also trivial. Wir setzen deshalb im weiteren Beweis $0 < q < 1$ voraus.

Es sei

$$w(k) = \binom{N}{k} p^{N-k} q^k, \quad 0 \leqq k \leqq N. \tag{12}$$

Dann ist

$$\frac{w(k+1)}{w(k)} = \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{q}{p} \text{ für } 0 \leqq k \leqq N-1. \tag{13}$$

Die natürliche Zahl k_0 sei durch

[12] *J. V. Uspensky*, Introduction to mathematical probability. New York und London 1937, S. 96—101.

$Nq - q < k_0 \leqq Nq + q$ definiert, d. h. es sei $k_0 = [Nq + q]$. (14)

Dann ist

$$\ldots w(k_0 - 2) < w(k_0 - 1) \leqq w(k_0) > w(k_0 + 1) > w(k_0 + 2) > \ldots \quad (15)$$

Ferner gilt für $h = -k_0 + 1, -k_0 + 2, \ldots N - k_0$ wegen 13 und 14

$$\frac{w(k_0+h)}{w(k_0+h-1)} = \frac{N-k_0-h+1}{k_0+h} \cdot \frac{q}{p} \geqq \frac{N-Nq-h-q+1}{Nq+q+h} \cdot \frac{q}{p} =$$

$$= \frac{(N+1)\,pq - hq}{(N+1)\,pq-hq+h} = \left(1 + \frac{h}{(N+1)\,pq - hq}\right)^{-1} \geqq \exp \frac{-h}{(N+1)\,pq-hq}, \quad (16)$$

sowie

$$\frac{w(k_0+h)}{w(k_0+h-1)} < \frac{(N+1)\,pq - hq + q}{(N+1)\,pq + hp - p} = 1 - \frac{h-1}{(N+1)\,pq + p(h-1)} \leqq$$

$$\leqq \exp \frac{1-h}{(N+1)\,pq + p(h-1)} \quad (17)$$

Nun ist für $1 \leqq n \leqq N - k_0$ wegen 17

$$\frac{w(k_0+n)}{w(k_0)} = \prod_{h=1}^{n} \frac{w(k_0+h)}{w(k_0+h-1)} = \prod_{h=1}^{n} \frac{(N-k_0-h+1)\,q}{(k_0+h)\,p} <$$

$$< \exp \sum_{h=1}^{n} \frac{1-h}{(N+1)\,pq + p(h-1)}. \quad (18)$$

Daher ist für $1 \leqq n \leqq N - k_0$

$$\frac{w(k_0)}{w(k_0+n)} < \exp \sum_{h=1}^{n} \frac{h-1}{(N+1)\,pq + p(h-1)} >$$

$$> \exp \sum_{h=1}^{n} \frac{h-1}{(N+1)\,pq + p(n-1)} = \exp \frac{\frac{1}{2}\,n(n-1)}{(N+1)\,pq + p(n-1)} = g_1^{-1} \quad (19)$$

Wegen 16 ist für $2 \leqq n \leqq k_0$

$$\frac{w(k_0-1)}{w(k_0-n)} = \prod_{h=-2}^{-n} \frac{w(k_0+h+1)}{w(k_0+h)} = \prod_{h=2}^{n} \frac{(N-k_0+h)\,q}{(k_0-h+1)\,p} \geqq$$

$$\geqq \prod_{h=2}^{n} \frac{(N+1)\,pq + (h-1)\,q}{(N+1)\,pq - (h-1)\,p} = \prod_{h=2}^{n} \left(1 - \frac{h-1}{(N+1)\,pq + (h-1)\,q}\right)^{-1} \geqq$$

$$\geqq \exp \sum_{h=2}^{n} \frac{h-1}{(N+1)\,pq + (h-1)\,q} \geqq \exp \frac{\frac{1}{2}\,n(n-1)}{(N+1)\,pq + (n-1)\,q} = g_2^{-1} \quad (20)$$

$(N+1\,pq+(n-1)\,p$ und $(N+1)\,pq+(n-1)\,q$ haben als Funktionen von q das Maximum $(N+n)^2/4\,N+4$. Damit ergeben 19 und 20

$$w(k_0) > g^{-1}\,w(k_0+n) \qquad \text{für } 1 \leqq n \leqq N-k_0 \tag{21}$$

$$w(k_0-1) > g^{-1}\,w(k_0-n) \quad \text{für } 2 \leqq n \leqq k_0-1,^{13} \tag{22}$$

wo

$$g = \exp \frac{-2\,n(n-1)\,(N+1)}{(N+n)^2} \tag{23}$$

ist.

Nun gilt nach Bernoulli[14]

$$\frac{w(k_0)}{w(k_0+n)} < \frac{w(k_0+1)}{w(k_0+n+1)} < \frac{w(k_0+2)}{w(k_0+n+2)} < \dots \tag{24}$$

und

$$\frac{w(k_0-1)}{w(k_0-n)} < \frac{w(k_0-2)}{w(k_0-n-1)} < \frac{w(k_0-3)}{w(k_0-n-2)} < \dots \tag{25}$$

Deshalb ist

$$w(k_0)+w(k_0+1)+\dots+w(k_0+n-1) > g^{-1}\,[w(k_0+n)+\dots+$$
$$+\,w(k_0+2\,n-1] > g^{-2}\,[w(k_0+2\,n)+\dots+w(k_0+3\,n-1)] > \dots \tag{26}$$

und

$$w(k_0-1)+w(k_0-2)+\dots+w(k_0-n+1) > g^{-1}\,\{w(k_0-n)+$$
$$+\,w(k_0-n-1)+\dots+w(k_0-2\,n+2)\} >$$
$$> g^{-2}\,\{w(k_0-2\,n+1)+\dots+w(k_0-3\,n+3)\} >$$
$$> g^{-3}\,\{w(k_0-3\,n+2)+\dots+w(k_0-4\,n+4)\} > \dots \tag{27}$$

26 und 27 sind zunächst nur für $n \leqq k_0$, $n \leqq N-k_0$ bewiesen. Sie gelten aber, wenn wir $w(k)=0$ setzen, sobald $k<0$ oder $k>N$ ist, in trivialer Weise auch für $n>k_0$ und für $n>N-k_0$. Wenn wir

$$W = \sum_{h=k_0-n+1}^{k_0+n-1} w(h)$$

setzen, gilt

$$W(g+g^2+\dots) > 1-W, \text{ d. h.} \tag{28}$$

$$W > 1-g, \text{ d. h.} \tag{29}$$

---

[13] Dieselbe untere Schranke bekommt man ebenso für $w(k_0)/w(k_0-n)$.

[14] A. a. O., S. 99. Unser $w(k_0-h)$ heißt dort L_h, unser $w(k_0+h)$ R_h für $h=1,2,3,\dots$, unser $w(k_0)$ M. Außerdem haben wir hier eine Verschiebung in den L_h um eine Einheit des Index vorgenommen, um das M nicht wie *Bernoulli* zu vernachlässigen.

$$1-g<w(k_0-n+1\leqq N\,h_N\leqq k_0+n-1)<$$
$$<w(Nq+q-n\leqq N\,h_N\leqq Nq-p+n). \qquad (29{,}1)$$

Nun sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Wir nehmen ähnlich dem Vorgehen *Bernoullis*[15]

$$n=[N\varepsilon],\ \text{d. h. } N\varepsilon-1<n\leqq N\varepsilon.$$

Ist $2\leqq[N\varepsilon]$, dann gibt 29,1

$$1-g<w(Nq+q-[N\varepsilon]\leqq N\,h_N\leqq Nq-p+[N\varepsilon])\leqq$$
$$\leqq w(Nq+q-N\varepsilon\leqq Nh_N\leqq Nq-p+N\varepsilon)<$$
$$<w(q-\varepsilon\leqq h_N\leqq q+\varepsilon),$$

womit 11 für $2\leqq[N\varepsilon]$ bewiesen ist. Da 11 für $[N\varepsilon]=0$ oder $=1$ trivial ist, ist 11 allgemein bewiesen.

Beispiel: $\varepsilon=0{,}05$, $N=1000$. Dann gibt 11

$$\text{bgl}\,(\,|\,h_{1000}-q\,|\leqq 0{,}05)\geqq 1-\exp(-4{,}45)=0{,}9883. \qquad (30)$$

Hier geben 2 und 10 Beglaubigungsgrade 0,90, bzw. 0,9027. Die *Laplace*sche Näherung liefert 0,9975. Dieser Wert ist aber als *Näherungswert* einer unteren Schranke zu verstehen. Ob er als untere Schranke selbst genommen werden darf, müßte man erst feststellen.

Beispiel: $\varepsilon=0{,}109$, $N=100$. Hier gibt 11

$$\text{bgl}\,(\,|\,h_{100}-q\,|\leqq 0{,}109)\geqq 1-\exp(-1{,}434)=0{,}778, \qquad (31)$$

was schlechter ist, als der von 2 gelieferte Beglaubigungsgrad 0,790. Das kommt daher, daß hier $N\varepsilon^2$ klein ist. Die Laplacesche Näherung liefert den Wert 0,9631. Er ist, wie eine Durchmusterung der *Romig*schen Tafeln[16] zeigt, zu groß. Denn nach diesen Tafeln ist $w(|\,h_{1000}-q\,|\leqq 0{,}109)$ für die folgenden q durch die Tabelle

q	$w(\,\|\,h_{100}-q\,\|\leqq 0{,}109)$
0,50	0,953955
0,49	0,954016
0,48	0,954160
0,47	0,954395
0,46	0,954716

gegeben, für diese q liegt diese Wahrscheinlichkeit *unter* der Laplaceschen Näherung. Das kommt hier davon, daß ε nahe bei 0,11 liegt.

[15] A. a. O. Unser ε heißt dort $1/t$, unser N *nt*.

[16] *H. G. Romig*, 50—100 Binomial Tables, New York, John Wiley 1953.

Für $\varepsilon = 0{,}1$ liefert die Laplacesche Näherung $\Theta(\sqrt{2}) = 0{,}9545$, während $w(\,|\,h_{100} - q\,| \leqq 0{,}1)$ nach Romig für $q = 0{,}5$ und $0{,}49$ die Werte 0,964799, bzw. 0,964839 annimmt, so daß in diesem Fall die Laplacesche Näherung tatsächlich eine untere Schranke liefert.

Nun seien $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gegeben und wir fragen: Für welche N können wir behaupten, daß

$$\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - h_N\,| \leqq \varepsilon) \geqq 1 - \delta$$

ist. Wir lösen gemäß 11′ die Gleichung

$$\delta = \exp \frac{-2N\varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{N\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{2}{N\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{(1+\varepsilon)^2} \tag{32}$$

nach N auf. Dazu bestimmen wir zunächst aus der Gleichung

$$\delta = \exp \frac{-2N_0\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}$$

den Näherungswert

$$N_0 = -\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2} \ln \delta$$

und iterieren von ihm ausgehend die Gleichung

$$N_{i+1} = N_0\left[\left(1 - \frac{1}{N_i\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{2}{N_i\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{N_i}\right)\right]^{-1}$$

Wir fragen etwa: Für welche N können wir bei $h_N = 1$ behaupten, daß

$$\mathrm{bgl}\,(q \geqq 0{,}98) \geqq 0{,}999$$

ist? Hier ergeben sich $N_0 = 8985$, $N_1 = 9140$, $N_2 = 9132$. $N \geqq 9132$.

Für $\varepsilon = 0{,}1$, $\delta = 0{,}01$ ergeben sich

$$N_0 = 279,\ N_1 = 311,\ N_2 = 307,\ N_3 = 307{,}4.\ N \geqq 308.$$

Ähnlich geht man vor, wenn N und δ gegeben sind und nach ε gefragt wird. Wir lösen 32 nach ε auf, indem wir zunächst aus der Gleichung

$\delta = \exp\,[-2(N+1)\,\varepsilon_0^2]$ den Näherungswert $\varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{-\ln\delta}{2(N+1)}}$

berechnen und dann die Gleichung

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_0 \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{(1-\frac{1}{N\varepsilon_i})(1-\frac{2}{N\varepsilon_i})}}$$

iterieren.

So ergeben sich für $N = 1000$, $\delta = 0{,}01$

$$\varepsilon_0 = 0{,}0480,\ \varepsilon_1 = 0{,}0519,\ \varepsilon_2 = 0{,}0520.\ \varepsilon \geqq 0{,}052.$$

Wenn q nicht nahe bei $^1/_2$ liegt, vergeben wir beim Übergang von 19 und 20 zu 21 und 22 ziemlich viel an Schärfe. Wir wollen daher für solche q eine schärfere Abschätzung herleiten.

Zunächst sei $q > {}^1/_2$. Dann ist $g_1 < g_2$ und man sieht genau wie 29 ein, daß $w > 1 - g_2$ ist. Wir haben also

$$W > 1 - \exp\frac{-n(n-1)}{2\{(N+1)pq+(n-1)q\}} = 1 - \exp\frac{-[N\varepsilon][N\varepsilon-1]}{2q\{(N+1)p+[N\varepsilon-1]\}} >$$

$$> 1 - \exp\frac{-(N\varepsilon-1)(N\varepsilon-2)}{2q\{(N+1)p+N\varepsilon-1\}} = 1 - \exp\frac{-(N\varepsilon-1)(N\varepsilon-2)}{2q\{(p+\varepsilon)N-q\}} >$$

$$> 1 - \exp\frac{-N\varepsilon^2(1-\frac{1}{N\varepsilon})(1-\frac{2}{N\varepsilon})}{2q(p+\varepsilon)},$$

mithin

$$w(|h_N - q| \leqq \varepsilon) > 1 - \exp\frac{-N\varepsilon^2(1-\frac{1}{N\varepsilon})(1-\frac{2}{N\varepsilon})}{2q(p+\varepsilon)} \tag{33}$$

Ist etwa $N = 1000$, $q = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}05$, dann gibt 33

$$w(|h_{1000} - 0{,}9| \leqq 0{,}05) > 1 - \exp(-8{,}71) = 0{,}99984$$

gegenüber der Schranke 0,9883, die wir in 30 mithilfe von 11 berechnet haben.

Ist $q < {}^1/_2$, dann tauschen p und q in 33 ihre Rollen.

Gegenüber 11 hat 33 den Nachteil, von q abzuhangen, ist also für die Induktion nicht brauchbar. Man kann sich aber auf folgende Weise helfen. Der Nenner in 33 nimmt für

$$q \geqq \frac{1+\varepsilon}{2} = r \tag{34}$$

mit wachsendem q ab. Ist nun h_N nahe bei 1 und soll bgl $(|h_N - q| \leqq \varepsilon)$ nach unten abgeschätzt werden, dann suchen wir zunächst mit einem

$\eta > \varepsilon$, für das $h_N - \eta \geqq r$ ist, mit der Formel 11 oder mit 11′ eine Abschätzung $\mathrm{bgl}\,(\,|\,h_N - q\,| \leqq \eta) \geqq A$. Für dieses A gilt

$$\mathrm{bgl}\,(q \geqq h_N - \eta) \geqq A.$$

Unter der Voraussetzung, daß $q \geqq h_N - \eta$ ist, gilt nach 33 und 34

$$\mathrm{bgl}\,(|\,h_N - q\,| \leqq \varepsilon) > 1 - \exp \frac{-N\varepsilon^2(1 - \frac{1}{N\varepsilon})\,(1 - \frac{2}{N\varepsilon})}{2(h_N - \eta)\,(1 - h_N + \eta + \varepsilon)} = B \qquad (35)$$

Nun überlegt man sich leicht, daß für die Beglaubigungsgrade die Grundrechenregeln der Wahrscheinlichkeiten, insbesondere die Kettenregel, gelten. Diese nimmt hier die Form an:

$$\mathrm{bgl}\,(a, b)\,\mathrm{bgl}\,(b, c) = \mathrm{bgl}\,(a, c). \qquad (36)$$

Danach ist

$$\mathrm{bgl}\,(\,|\,h_N - q\,| \leqq \varepsilon) > AB. \qquad (37)$$

Beispiel: $N = 1000$, $\varepsilon = 0{,}05$, $h_N = 0{,}9$. Wir nehmen etwa $\eta = 0{,}08$. Dann gibt 11′

$$\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}08) \geqq 1 - \exp(-10{,}58) = 1 - 0{,}0000255 = A.$$

Unter der Voraussetzung, daß $q \geqq 0{,}82$ ist, gibt 33

$$\mathrm{bgl}\,(h_{1000} = 0{,}9,\ |\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00198 = B.$$

Damit haben wir

$$\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > AB = 1 - 0{,}00201 = 0{,}99799$$

gegenüber dem Beglaubigungsgrad 0,9883, den einfache Anwendung von 11 liefert.

Für $\eta = 0{,}1,\ 0{,}09,\ 0{,}07,\ 0{,}06$ erhalten wir ebenso der Reihe nach

$$\begin{aligned}
&\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00279\\
&\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00236\\
&\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00188\\
&\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00352
\end{aligned}$$

Mit einer rohen Skizze sieht man mit hinreichender Genauigkeit, daß man das Maximum der Beglaubigung ungefähr für $\eta = 0{,}073$ bekommt als $\mathrm{bgl}\,(\,|\,q - 0{,}9\,| \leqq 0{,}05) > 1 - 0{,}00185 = 0{,}99815$.

Natürlich könnte man das η, für welches sich auf diese Weise die größte Beglaubigung ergibt, genau ausrechnen. Das würde die Auflösung einer sehr komplizierten transzendenten Gleichung erfordern, was hier nicht dafürsteht.

Statt der obigen „zweistufigen" Berechnung einer Beglaubigung kann man auch mehr Stufen verwenden, indem man für die erste Stufe 11, für alle weiteren 33 benützt. Das lohnt sich aber nur, wenn q sehr nahe bei 1, ε sehr klein und N sehr groß ist.

Für $h_N = 1$ ist es zweckmäßig, η so zu wählen, daß

$$\eta > \varepsilon \text{ und } 2\,\eta^{3/2}(1-\eta) \geqq \varepsilon \geqq \eta^2 \tag{38}$$

ist. Dann wird, wie man leicht nachrechnet, $A \geqq B$. Damit ist B^2 eine untere Schranke für die gesuchte Beglaubigung und man braucht A nicht zu berechnen. Dadurch haben wir den folgenden Satz:

(39) Ergibt sich bei N Zügen aus einem Spiel S N-mal das Merkmal a, dann gilt, wenn zwischen ε und η die Beziehungen 38 bestehen, für die Wahrscheinlichkeit von q im Spiel S die folgende Beglaubigung:

$$\text{bgl}\,(q \geqq 1-\varepsilon) > \left\{1 - \exp \frac{-N\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{N\varepsilon}\right)\left(1-\frac{2}{N\varepsilon}\right)}{2(1-\eta)(\eta+\varepsilon)}\right\}^2.$$

Die nachstehende Tabelle gibt die Beziehung $\varepsilon = 2\,\eta^{3/2}(1-\eta)$ mit ε als unabhängiger Veränderlichen mit Rechenschiebergenauigkeit:

ε	η	ε	η
0,00	0	0,10	0,1514
1	0,0297	11	1629
2	480	12	1740
3	635	13	1854
4	778	14	1966
5	911	15	2078
6	1039	16	219
7	1162	17	230
8	1282	18	241
9	1399	19	253
0,10	0,1514	0,20	264

Für $0 < \varepsilon < 0{,}01$ hat die Näherung

$$\eta = (\varepsilon/2)^{3/2}$$

die angegebene Genauigkeit.

$$\eta''(0{,}1432) = 0$$

Beispiel: $N = 1000$, $h_N = 1$, $\varepsilon = 0{,}05$. Hier gibt die Tafel $\eta = 0{,}0911$. Wir bekommen also

$$\text{bgl}\,(h_N = 1,\, q \geqq 0{,}95) > 1 - 2\exp\frac{-1000 \,.\, 0{,}0025\left(1-\frac{1}{50}\right)\left(1-\frac{2}{50}\right)}{2 \,.\, 0{,}909 \,.\, 0{,}1411} =$$

$$= 1 - 2\exp(-9{,}17) = 0{,}99979.$$

Das ist erheblich näher bei 1 als der von der Laplaceschen Formel gelieferte Näherungswert $\Theta(\varepsilon\sqrt{2N}) = \Theta(2{,}236) = 0{,}99843$.

Alle hier betrachteten Abschätzungen sind Abschätzungen nach unten.

The Average Order of Certain Types of Arithmetical Functions: Generalized k-free Numbers and Totient Points

By

Eckford Cohen, Knoxville, Tenn., U. S. A.

(Received September 14, 1959)

1. Introduction In his classic memoir of 1874 *Mertens* [9] obtained the averge order of the function $t(n)$, defined to be the number of square-free divisors of n, by reducing this problem to the familiar *Dirichlet* divisor problem. *Mertens*'s method was based on the identity,

$$t(n) = \sum_{d^2e=n} \mu(d)\,\tau(e), \tag{1.1}$$

where $\tau(n)$ denotes the number of divisors of n and $\mu(n)$ is the *Möbius* μ-function. *A* decade later *Gegenbauer* [4, p. 607] generalized this approach to obtain the average order of $t_k(n)$, the number of k-free divisors of n ($t_2(n) = t(n)$). More recently, *Hölder* [6] and *Daniloff* [3] have used the same procedure to obtain *Gegenbauer*'s results in a somewhat more precise form. The above writers based their treatment of $t_k(n)$ upon the following extension of *Mertens*'s identity (1.1),

$$t_k(n) = \sum_{d^ke=n} \mu(d)\,\tau(e). \tag{1.2}$$

In this paper we show how the method discussed above can be generalized to obtain the average order of functions of a very extensive class. The method is based upon two identities, (2.3) and (2.6), the first being a generalization of (1.2), applicable to "divisor-type" functions, and the second an analogous formula relating to functions of "totient type". To illustrate the method we consider in § 3 the average order of the divisor function $s_k(n)$, defined to be the sum of the divisors of n whose complementary divisors are k-free, and in § 4 the average order of the totient $\psi_k(n)$, defined to be the number of integers $a \pmod n$

such that (a, n) is a k-th power. We also consider in § 3 a function $r_k(n)$ defined by (3.6) and include a brief discussion of $t_k(n)$ as well.

Each of the special functions mentioned above can be reduced, on the basis of the identities of § 2, to the simplest non-trivial case possible, namely, the case $k = 0$ (see Remark 2.1). The functions corresponding to this case are denoted as follows: $s_0(n) = \sigma(n)$, the sum of all divisors of n; $\psi_0(n)=\phi(n)$, the *Euler* ϕ-function; $r_0(n) = r(n)$, the number of representations of n as a sum of two squares; $t_0(n) = \tau(n)$.

In § 5 we consider certain generalizations of the functions discussed in § 3. The treatment is similar except that the *Möbius* function is replaced by the more general function $\lambda_b(n)$ of *Gegenbauer* [5]. Correspondingly, the role of the k-free integers is performed by the *integers of type* (b, k), $b \geqq 0$, that is, integers whose greatest k-th power divisor is also a bk-th power divisor. The concluding section (§ 6) is devoted to some applications of the results of § 3 to certain types of lattice points in circular and hyperbolic regions, in particular, lattice points whose coordinates have 1 as greatest common *kth* power divisor (*totient points of rank k*). These results are contained in Theorems 6.1 and 6.2, and generalizations to (b, k)-*totient points* are stated in Theorems 6.3 and 6.4.

The special problems discussed in this paper are evidently generalizations of four classical problems, the *Dirichlet* divisor problem $(\tau(n))$, the second *Dirichlet* divisor problem $(\sigma(n))$, the *Mertens* totient problem $(\phi(n))$, and the *Gauss* circle problem $(r(n))$. We record for our later discussion the following known estimates. Suppose that $x \geqq 2$. If α_1 is the least value such that for all $\epsilon > 0$,

$$T(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(x^{\alpha_1+\epsilon}), \tag{1.3}$$

then $\alpha_1 \leqq 15/46$ [11]; if α_2 is the least value such that for all $\epsilon > 0$,

$$S(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x(\log x)^{\alpha_2+\epsilon}), \tag{1.4}$$

then $\alpha_2 \leqq 3/4$ [10]; if α_3 is the least value such that for all $\epsilon > 0$,

$$\Psi(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \phi(n) = \frac{3 x^2}{\pi^2} + O(x(\log x)^{\alpha_3+\epsilon}), \tag{1.5}$$

then $\alpha_3 \leqq 3/4$ [14]; if α_4 is the least value such that for all $\epsilon > 0$,

$$R(x) \equiv \sum_{r \leqq x} r(n) = \pi x + O(x^{\alpha_4+\epsilon}), \tag{1.6}$$

then $\alpha_4 \leqq 13/40$ [7]. It is also well known that $\alpha_1 \geqq 1/4$ [13, § 12.6] and that $\alpha_4 \geqq 1/4$ [8, vol. 2, VIII, Chap. 6]. The inequalities $\alpha_2 \geqq 0$, $\alpha_3 \geqq 0$ are almost trivial.

2. *Two fundamental identities.* Let M denote an arbitrary set of positive integers, let Z denote the set of positive integers, and let the unit set (consisting of 1 alone) be denoted by 1. Let $\varrho_M(n)$ denote the *characteristic* function of M; that is, $\varrho_M(n) = 1$ of 0 according as $n \in M$ or $n \notin M$, and place

$$\varrho_M(n) = \sum_{d|n} \mu_M(d). \tag{2.1}$$

The function $\mu_M(n)$ is the *inversion* function of the set M. Also, for an arithmetical function $f(n)$, define

$$F_M(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in M}} f(d), \qquad F(n) = F_Z(n). \tag{2.2}$$

Such functions $F_M(n)$ will be called functions of *divisor type*. We prove first an identity expressing $F_M(n)$ in terms of $F(n)$.

Theorem 2.1.

$$F_M(n) = \sum_{d|n} \mu_M(d)\, F(n/d). \tag{2.3}$$

Proof. By (2.2) and (2.1) we have

$$F_M(n) = \sum_{d|n} f(d)\, \varrho_M(n/d) = \sum_{d|n} f(d) \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} \mu_M(\delta) = \sum_{\delta|n} \mu_M(\delta) \sum_{d \mid \frac{n}{\delta}} f(d) = \sum_{\delta|n} \mu_M(\delta) F_Z(n/\delta),$$

which proves (2.3) by definition of $F_Z(n)$.

By *Möbius* inversion, one obtains on the basis of (2.1),

$$\mu_M(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in M}} \mu(d); \tag{2.4}$$

in particular, $\mu_1(n) = \mu(n)$. We define now

$$G_M(n) = \sum_{de=n} f(d)\, \mu_M(e), \quad G(n) = G_1(n). \tag{2.5}$$

Functions of this form will be referred to as *totient type* functions. Our second identity expresses $G_M(n)$ in terms of $G(n)$.

Theorem 2.2.

$$G_M(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \in M}} G(n/d). \tag{2.6}$$

Proof. By (2.5) and (2.4) and the fact that $\mu_1(n) = \mu(n)$, one deduces

$$G_M(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\mu_M(n/d) = \sum_{d|n} f(d) \sum_{\substack{\delta e = \frac{n}{d} \\ e \in M}} \mu(\delta) = \sum_{\substack{e|n \\ e \in M}} \sum_{d\delta = \frac{n}{e}} f(d)\,\mu(\delta) = \sum_{\substack{e|n \\ e \in M}} G_1(n/e),$$

and (2.6) follows since $G(n) = G_1(n)$, by definition.

Remark 2.1. It is observed that $F_M(n)$ and $G_M(n)$ generate families of functions as M ranges through the totality of sets of positive integers. The formula (2.3) thus reduces each member of the family $F_M(n)$ to that member corresponding to the set $M = Z$, while (2.6) reduces each member of $G_M(n)$ to the one corresponding to $M = 1$.

3. *Functions of divisor type.* The relation (2.3) is particularly useful in case M is the set U_k consisting of all k-free numbers. Denoting the inversion function of U_k by $\mu_k(n)$, it is easily verified [1, § 6] that if $k > 0$,

$$\mu_k(n) = \begin{cases} \mu(m) & \text{if } n = m^k,\ m \text{ integral}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

One will observe that $U_0 = Z$, $\mu_0(n) = \varrho_1(n)$.

Place now

$$g_k(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in U_k}} f(d), \qquad g(n) = g_0(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

so that by Theorem 2.1 and (3.1),

$$g_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ e \in U_k}} \mu_k(d)\, g_0(n/d) = \sum_{d^k \delta = n} \mu(d)\, g(\delta). \tag{3.2}$$

We consider first the function $s_k(n)$. Let $\zeta(s)$ denote the *Riemann* zeta-function.

Theorem 3.1. *If* $k > 1$ *and* α_2 *is defined as in* (1.4), *then for all* $\epsilon > 0$,

$$S_k(x) \equiv \sum_{n \leqq x} s_k(n) = \frac{\pi^2\, x^2}{12\, \zeta(2\,k)} + O(x(\log x)^{\alpha_2 + \epsilon}). \tag{3.3}$$

Proof. By (3 2), with $f(n) = n$, $g_k(n) = s_k(n)$, $g(n) = \sigma(n)$, one obtains, on placing $z = \sqrt[k]{x}$)

$$S_k(x) = \sum_{d^k \delta \leqq x} \mu(d)\, \sigma(\delta) = \sum_{d \leqq z} \mu(d)\, S\,(x/d^k). \tag{3.4}$$

Applying (1.4), it follows (since $\alpha_2 \geqq 0$) that for all $\epsilon > 0$,

$$S_k(x) = \frac{\pi^2 x^2}{12} \sum_{d \leqq z} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} + O\left(x \sum_{d \leqq {}^k\sqrt{x/2}} \frac{1}{d^k} \left(\log \frac{x}{d^k} \right)^{\alpha_4 + \epsilon} \right) + O({}^k\sqrt{x})$$

$$= \frac{\pi^2 x^2}{12} \sum_{d \leqq z} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} + O\left(x(\log x)^{\alpha_4 + \epsilon} \sum_{d \leqq z} \frac{1}{d^k} \right) + O(x^{\frac{1}{k}})$$

$$= \frac{\pi^2 x^2}{12} \left(\frac{1}{\zeta(2k)} \right) + O\left(x^2 \sum_{d > z} \frac{1}{d^{2k}} \right) + (x(\log x)^{\alpha_4 + \epsilon}) + O(x^{\frac{1}{k}})$$

$$= \frac{\pi^2 x^2}{12\, \zeta(2k)} + O(x^{1/k}) + O(x(\log x)^{\alpha_4 + \epsilon}),$$

from which (3.2) results immediately.

Corollary 3.1 ($k = 2$). *For all* $\epsilon > 0$,

$$S_2(x) = \frac{15\, x^2}{2\, \pi^2} + O(x(\log x)^{\alpha_4 + \epsilon}). \tag{3.5}$$

Next we consider the function $r_k(n)$ defined by

$$r_k(n) = 4 \sum_{\substack{de = n \\ (e\ k-free)}} \chi(d), \tag{3.6}$$

where $\chi(n)$ represents the non-trivial character (mod 4). It is noted that $r_0(n) = r(n)$, by the well known formula [8, vol. 1, III, Chap. 2] for $r(n)$.

Theorem 3.2. *If* $k > 1$ *and* α_4 *is defined as in* (1.6), *then for all* $\epsilon > 0$,

$$R_k(x) \equiv \sum_{n \leqq x} r_k(n) = \frac{\pi x}{\zeta(k)} + O(E_k(x)), \tag{3.7}$$

where $E_k(x) = x^{\alpha_4 + \epsilon}$ *if* $k \geqq 4$ *and* $= x^{1/k}$ *if* $k < 4$.

Proof. The case $f(n) = 4\chi(n)$, $g_k(n) = r_k(n)$, $g(n) = r(n)$ in (3.2) yields, with $z = {}^k\sqrt{x}$,

$$R_k(x) = \sum_{d^k \delta \leqq x} \mu(d)\, r(\delta) = \sum_{d \leqq z} \mu(d)\, R(x/d^k). \tag{3.8}$$

We apply now (1.6), obtaining for all $\epsilon > 0$,

$$R_k(x) = \pi x \sum_{d \leqq z} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(x^{\alpha_4 + \epsilon} \sum_{d \leqq z} \frac{1}{d^{k(\alpha_4 + \epsilon)}} \right).$$

Since $\alpha_0 \geqq 1/4$, it is clear that the O-term is $O(x^{\alpha_4 + \epsilon})$, provided $k \geqq 4$. Moreover, since $\alpha_4 < 1/3$, it follows in case $k < 4$, on choosing ϵ sufficiently small, that the O-term is $O(x^{1/k})$. It thus follows that

$$R_k(x) = \frac{\pi(x)}{\zeta(k)} + O\left(x \sum_{k>s} \frac{1}{d^k}\right) + O(E_k(x)),$$

and (3.7) results, because the first O-term is $O(x^{1/k})$ and $\alpha_4 \geqq 1/4$.

We state the following result for $t_k(n)$ without proof; the details are similar to those found in *Hölder*'s paper [6].

Theorem 3.3. *If* $k > 1$ *and* α_1 *is defined by* (1.3), *then for all* $\epsilon > 0$,

$$T_k(x) \equiv \sum_{n \leqq x} t_k(n) = \frac{x}{\zeta(k)}\left(\log x + 2\gamma - 1 - k\frac{\zeta'(k)}{\zeta(k)}\right) + O(E_k^*(x)), \quad (3.9)$$

where $E_k^*(x) = x^{\alpha_1+\epsilon}$ *for* $k \geqq 4$ *and* $= x^{1/k}\log x$ *for* $k < 4$.

To improve the estimates for the cases $k = 2$ and $k = 3$ in (3.7) and (3.9), the method of this paper requires further refinement. For a brief discussion in the case of the *Mertens* divisor problem we refer to *Suetuna* [12].

4. *Functions of totient type.* We show in this section the usefulness of the relation (2.6) in case M is the set V_k of all k-th powers. In this case, it can be shown [1, § 6] that, if $\psi_k(n)$ is defined as in the Introduction, then

$$\psi_k(n) = \sum_{de=n} d\,\lambda_k(e), \quad (4.1)$$

where $\lambda_k(n)$ denotes the inversion function of V_k. Note that V_0 is the unit set. We now prove the following theorem on the average order of $\psi_k(n)$.

Theorem 4.1. *If* $k > 1$ *and* α_3 *is defined as in* (1.5), *then for all* $\epsilon > 0$,

$$\Psi_k(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \psi_k(n) = \left(\frac{3\,\zeta(2k)}{\pi^2}\right) x^2 + O(x(\log x)^{\alpha_3+\epsilon}). \quad (4.2)$$

Proof. By Theorem 2.2 with $M = V_k$ and $f(n) = n$, it follows on the basis of (4.1) that

$$\psi_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\in V_k}} \psi_0(n/d) = \sum_{d^k\delta=n} \phi(\delta). \quad (4.3)$$

Hence with $z = \sqrt[k]{x}$, one has

$$\Psi_k(x) = \sum_{d^k\delta\leqq x} \phi(\delta) = \sum_{d\leqq z} \Psi(x/d^k). \quad (4.4)$$

(1.5) may now be applied, yielding for all $\epsilon > 0$, since $\alpha_3 \geqq 0$,

$$\Psi_k(x) = \frac{3\,x^2}{\pi^2} \sum_{d \leqq z} \frac{1}{d^{2k}} + O\left(x(\log x)^{\alpha_3+\epsilon} \sum_{d \leqq {}^k\sqrt{x/2}} \frac{1}{d^k}\right)$$

$$= \left(\frac{3\,x^2}{\pi^2}\right) \zeta(2\,k) + O\left(x^2 \sum_{d>z} \frac{1}{d^{2k}}\right) + O(x(\log x)^{\alpha_3+\epsilon}),$$

and (4.2) results, because the first O-term is $O(x^{1/k})$.

Corollary 4.1 ($k = 2$). *For all* $\epsilon > 0$,

$$\Psi_2(x) = \frac{\pi^2\,x^2}{30} + O(x(\log x)^{\alpha_3+\epsilon}). \tag{4.5}$$

5. *Generalizations.* For a given non-negative integer k, every positive integer n has a unique factorization of the form, $n = n_1{}^k\, n_2$ where n_2 is a positive k-free number. If n_1 is a b-th power for the non-negative integer b, then n will be called an integer of type (b, k). The integers of type $(b, 1)$ are the b-th powers, while the integers of type $(0, k)$ are the k-free numbers. Denote by U_k^b the set of all intege s of type (b, k) and let $\eta_k^b(n)$ denote the inversion function of U_k^b; that is,

$$\sum_{d|n} \eta_k^b(d) = \epsilon_k^b(n) \equiv \begin{cases} 1 & (n \in U_k^b) \\ 0 & (n \notin U_k^b). \end{cases} \tag{5.1}$$

Note that $U_k^0 = U_k$, $U_1^b = V_b$, $\eta_k^0(n) = \mu_k(n)$, $\eta_1^b(n) = \lambda_b(n)$, as defined in the previous sections.

With n_1 and n_2 defined as above, we note that

$$\sum_{d^k \mid n} \lambda_b(d) = \sum_{d|n_1} \lambda_b(d) = \epsilon_1^b(n_1) = \epsilon_k^b(n). \tag{5.2}$$

It therefore follows, on comparing (5.1) and (5.2), that for $k > 0$,

$$\eta_k^b(n) = \begin{cases} \lambda_b({}^k\sqrt{n}) & \text{if } n = a\ k\text{-th power}, \\ 0 & \text{if } n \neq a\ k\text{-th power}. \end{cases} \tag{5.3}$$

This relation reduces to (3.1) in base $b = 0$.

Theorem 2.1 applied to the set $M = U_k^b$ yields the following generalization of (3.2). Let

$$g_k^b(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in U_k^b}} f(d), \qquad g(n) = g_0^1(n) = \sum_{d|n} f(d);$$

then by (5.3)

$$g_k^b(n) = \sum_{d|n} \eta_k^b(d)\, g_0^1(n/d) = \sum_{d^k \delta = n} \lambda_b(d)\, g(\delta). \tag{5.4}$$

By [1], $\lambda_b(n)$ is multiplicative, and in case $b \geqq 2$, p prime, $g \geqq 0$, $\lambda_b(p^g) = 1$, -1, or 0 according as $g \equiv 0 \pmod b$, $g \equiv 1 \pmod b$, or otherwise. Moreover, $\lambda_0(n) = \mu(n)$, $\lambda_1(n) = \epsilon_1^0(n)$, $\lambda_2(n) = \lambda(n)$, where $\lambda(n)$ is the *Liouville* function. In particular, for all $b \geqq 0$, $\lambda_b(n)$ is bounded. Also, by (2.4)

$$\lambda_b(n) = \sum_{de^b = n} \mu(d),$$

so that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(bs)}{\zeta(s)}, \qquad (s > 1,\ b > 0). \tag{5.5}$$

On the basis of (5.4), (5.5) and the boundedness of $\lambda_b(n)$, it is possible to extend the results obtained in § 3 for $s_k(n)$, $r_k(n)$, and $t_k(n)$ to generalized functions, defined as follows,

$$t_k^b(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in U_k^b}} 1, \quad s_k^b(n) = \sum_{\substack{de=n \\ e \in U_k^b}} d, \quad r_k^b(n) = 4 \sum_{\substack{de=n \\ e \in U_k^b}} \chi(d).$$

In particular, $t_k^b(n)$ denotes the number of divisors of n of type (b, k), while $s_k^b(n)$ is the sum of the divisors of n whose complementary divisors are of type (b, k). The functions $t_k(n)$, $s_k(n)$, and $r_k(n)$ arise as the case $b = 0$ of the generalized functions.

Since the details are similar to those of § 3, we list the following results without proof.

Theorem 5.1. *If* $k > 1$, $b > 0$, *and* α_2 *is defined as in* (1.4), *then for all* $\epsilon > 0$,

$$S_k^b(x) \equiv \sum_{n \leqq x} s_k^b(n) = \frac{\pi^2\, \zeta(2\,bk)\, x^2}{12\, \zeta(2\,k)} + O(x(\log x)^{\alpha_2 + \epsilon}). \tag{5.6}$$

Theorem 5.2. *If* $k > 1$, $b > 0$, *then*

$$R_k^b(x) \equiv \sum_{n \leqq x} r_k^b(n) = \frac{\pi\, \zeta(bk)\, x}{\zeta(k)} + O(E_k(x), \tag{5.7}$$

where $E_k(x)$ *is defined as in Theorem* 3.2.

Theorem 5.3. *If* $k > 1$, $b > 0$, *and* $E_k^*(x)$ *is defined as in Theorem* 3.3, *then* $T_k^b(x) \equiv$

$$\sum_{n \leqq x} t_k^b(n) = \frac{x(\log x + 2\gamma - 1)\, \zeta(bk)}{\zeta(k)} + kx \left(\frac{\zeta(bk)}{\zeta(k)}\right)' + O(E_k^*(x)). \tag{5.8}$$

To obtain an analogue of Theorem 4.1 corresponding to Theorem 5.1, we define a number to be *of co-type* (b, k) *if* n *is the* k-th *power of a*

b-free number. Clearly, every integer can be represented uniquely as the product of an integer of type (b, k) and one of co-type (b, k). If we denote by $\psi_k^b(n)$ the number of integers, $1 \leqq a \leqq n$, such that (a, n) is of co-type (b, k), then by [1, Theorem 6], (cf Remark 6.2 below),

$$\psi_k^b(n) = \sum_{de=n} d\, \lambda_k^b(e), \quad (\lambda_k^0(n) = \lambda_k(n)), \tag{5.9}$$

where $\lambda_k^b(n)$ is the inversion function of the set of integers of co-type (b, k). Hence, by Theorem 2.2,

$$\psi_k^b(n) = \sum_{\substack{d^k \delta = n \\ (d\ b=free)}} \phi(\delta). \tag{5.10}$$

An argument similar to that of § 4 leads to the following result (cf. [2, Lemma 4.1]).

Theorem 5.4. *If* $b > 0$, $k > 1$, *then for all* $\epsilon > 0$,

$$\Psi_k^b(x) = \left(\frac{3\,\zeta(2\,k)}{\pi^2\,\zeta(2\,bk)}\right) x^2 + O(x(\log x)^{a_3+\epsilon}). \tag{5.11}$$

6. *Totient Points.* If X, Y are integers, not both zero, then $(X, Y)_k$ will be used to denote their greatest common k-th power divisor. In case $(X, Y)_k = 1$, the lattice point $\{X, Y\}$ will be called a *totient point of rank* k. We apply some of the preceding results to totient points in certain regions. In particular, let $T_k^*(x)$ denote the number of positive totient points of rank k upon and within the hyperbola $X\,Y = x$, that is, the number of totient points X_1, Y_1 satisfying $1 \leqq X_1\,Y_1 \leqq x$, $X_1 > 0$. Also, let $R_k^*(x)$ denote the number of totient points of rank k upon and within the circle, $X^2 + Y^2 = x$. We have

Lemma 6.1. *If* $k \geqq 1$, *then* $T_k^*(x) = T_{2k}(x)$, $R_k^*(x) = R_{2k}(x)$, *where* x *is any real number* > 1.

Proof. Let $t_k^*(n)$ denote the number of totient points of rank k on the hyperbola $X\,Y = n$. For a lattice point $\{X, Y\}$ of the hyperbola, suppose that $(X, Y)_k = d^k$, $X = d^k\,X_1$, $y = d^k\,Y_1$. Then $X_1\,Y_1 = n/d^{2k}$, $(X_1\,Y_1)_k = 1$, from which it follows that the number of lattice points on $X\,Y = n$ is

$$\tau(n) = \sum_{d^{2k}|n} t_k^*\,(n/d^{2k}) = \sum_{d|n} \epsilon_1^{2k}(d)\, t_k^*\,(n/d),$$

where as in § 5, $\epsilon_1^b(n) = 1$ or 0 according as n is or is not a b-th power. Then by generalized inversion [1, § 2],

$$t_k^*(n) = \sum_{d|n} \mu_{2k}(d)\, \tau(n/d) = \sum_{d^{2k}|n} \mu(d)\, \tau(n/d^{2k}),$$

and hence by (3.2) with $g(n) = \tau(n)$, one obtains

$$t_k^*(n) = t_{2k}(n), \qquad T_k^*(x) = T_{2k}(x). \tag{6.1}$$

By a similar argument one may prove that

$$r_k^*(n) = r_{2k}(n), \qquad R_k^*(x) = R_{2k}(x), \tag{6.1a}$$

where $r_k^*(n)$ denotes the number of totient points of rank k on the circle $X^2 + Y^2 = n$, thus establishing the lemma.

On the basis of Lemma 6.1, we obtain the following results as a consequence of Theorems 3.2 and 3.3.

Theorem 6.1. *If* $k \geqq 1$, *then for all* $\epsilon > 0$,

$$R_k^*(x) = \frac{\pi x}{\zeta(2k)} + \begin{cases} O(x^{a_1+\epsilon}) & \text{if } k > 1, \\ O(\sqrt{x}) & \text{if } k = 1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Theorem 6.2. If $k \geqq 1$, *then for all* $\epsilon > 0$

$$T_k^*(x) = \frac{x}{\zeta(2k)}\left(\log x + 2\gamma - 1 - \frac{2k\zeta'(2k)}{\zeta(2k)}\right) + \begin{cases} O(x^{a_1+\epsilon}) \text{ or} \\ O(\sqrt{x}\log x), \end{cases} \tag{6.3}$$

according as $k > 1$ *or* $k = 1$.

The above discussion may be generalized to numbers of type (b, k) as follows. If X, Y are integers, not both zero, define $(X, Y)_{b,k}$ to be the greatest common divisor of X and Y which is of co-type (b, k). If $(X, Y)_{b,k} = 1$, then the lattice point $\{X, Y\}$ will be called a (b, k)-*totient point*. Denote by $t_{b,k}^*(n)$ the number of (b, k)-totient points on the hyperbola $XY = N$ and by $r_{b,k}^*(n)$ the number of (b, k)-totient points on the circle $X^2 + Y^2 = n$. Then as above, let $T_{b,k}^*(x)$ and $R_{b,k}^*(x)$ denote the corresponding summatory functions, that is, $T_{b,k}^*(x)$ is the number of (b, k)-totient points of the hyperbolic region, $XY \leqq x$, while $R_{b,k}^*(n)$ denotes the number of (b, k)-totient points of the circular region, $X^2 + Y^2 \leqq x$.

Using the notation of § 5, one may prove

Lemma 6.2. *If* $k \geqq 1$, *then*

$$T_{b,k}^*(x) = T_{2k}^b(x), \qquad R_{b,k}^*(x) = R_{2k}^b(x).$$

Remark 6.1. In case $b = 0$, Lemma 6.2 reduces to Lemma 6.1.

Proof. By a direct generalization of the proof of Lemma 6.1, it can be shown that

$$t_{b,k}^*(n) = t_{2k}^b(n), \qquad r_{b,k}^*(n) = r_{2k}^b(n), \tag{6.4}$$

from which the Lemma follows immediately.

Remark 6.2. The arithmetical inversion on which the above proof is based is a consequence of the fact that the sets of integers of type (b, k) and of co-type (b, k) form a conjugate pair of direct factor sets [1].

By virtue of Lemma 6.2 and Theorems 5.2 and 5.3, one obtains the following analogues of Theorems 6.1 and 6.2.

Theorem 6.3. *If* $b > 0$, $k \geqq 1$, *then for all* $\epsilon > 0$,

$$R^*_{b,k}(x) = \frac{\pi\, \zeta(2\,bk)\, x}{\zeta(2\,k)} + \begin{cases} O(x^{a_4+\epsilon}) & \text{if } k > 1, \\ O(\sqrt{x}) & \text{if } k = 1. \end{cases} \tag{6.5}$$

Theorem 6.4. *If* $b > 0$, $k \geqq 1$, *then for all* $\epsilon > 0$,

$$T^*_{b,k}(x) = \frac{x(\log x + 2\,\gamma - 1)\, \zeta(2\,bk)}{\zeta(2\,k)} + 2\,kx \left(\frac{\zeta(2bk)}{\zeta(2\,k)}\right)' + \begin{cases} O(x^{a_1+\epsilon}), \text{ or} \\ O(\sqrt{x}\,\log x), \end{cases} \tag{6.6}$$

according as $k > 1$ or $k = 1$.

Bibliography

[1] *Eckford Cohen*, A class of residue systems (mod r) and related arithmetical functions I. A generalization of Möbius inversion, Pacific Journal of Mathematics, vol. 9 (1959), pp. 13—23.

[2] *Eckford Cohen*, A class of residue systems (mod r) and related arithmetical functions, II. Higher dimensional analogues, Pacific Journal of Mathematics, vol. 9 (1959), pp. 00—00.

[3] *Georges Daniloff*, Contribution à la théories des fonctions arithmétiques, Recueil de l'Académie des sciences (Sofia), vol. 35 (1941), pp. 479—590 (Bulgarian, French summary).

[4] *Leopold Gegenbauer*, Über die Divisoren der ganzen Zahlen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften (Vienna), vol. 91 (1885), pt. II, pp. 600—621.

[5] *Leopold Gegenbauer*, Über ein arithmetisches Theorem des Herrn J. Liouville, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften (Vienna), vol. 95 (1887), pp. 606—609.

[6] *Otto Hölder*, Über ein asymptotische Ausdruck, Acta Mathematica, vol. 59 (1932), pp. 89—97.

[7] *Loo-Keng Hua*, The lattice points in a circle, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, vol. 13 (1942), pp. 18—29.

[8] *Edmund Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3 vols., reprinted New York, 1947.

[9] *F. Mertens*, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journal für die reine und die angewandte Mathematik, vol. 77 (1874), pp. 289—338.

[10] *Cheng-Tung Pan*, On $\sigma(n)$ and $\phi(n)$, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, vol. 4 (1956), pp. 637—638.

[11] *Hans-Egon Richert*, Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem, Mathematische Zeitschrift, vol. 58 (1953), pp. 204—218.

[12] *Zyoiti Suetuna*, On the number of decompositions of an integer into two relatively prime factors, Japanese Journal of Mathematics, vol. 1 (1924), pp. 5—7.

[13] *E. C. Titchmarsh*, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford, 1951 (Chapter 12).

[14] *Arnold Walfisz*, On Euler's function, Akademiia Nauk Gruzin, vol. 19 (1953), pp. 1—31 (Russian); English translation, American Mathematical Society Translations, Series 2, vol. 4 (1956), pp. 1—29.

University of Tennessee

Turánsche und Forsythesche Funktionenfolgen

Von

Lothar Koschmieder, Tübingen

(Eingegangen am 30. September 1959)

1. In der Analysis erscheinen außer den Legendreschen Polynomen $P_m(x)$ selbst gelegentlich[1, 1)] auch die Summen $P_m(x) + P_{m+1}(x)$ zweier benachbarter von ihnen, auf die mich Herr *H. Kneser* neulich aus einem das Folgende nicht betreffenden Anlaß hinwies. Die $P_m(x)$ genügen im Gebiete $-1 < x < 1$ der — auf ihre Hankelschen Determinanten bezüglichen — Turánschen Ungleichung[1, 2)]

$$(1.1) \qquad \begin{vmatrix} P_{m-1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m+1}(x) \end{vmatrix} < 0 \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Man kann fragen, ob die Summen $P_m(x) + P_{m+1}(x)$ ebenfalls in einem Gebiete mit einer von m unabhängigen Länge die Eigenschaft

$$(1.2) \qquad \begin{vmatrix} P_{m-1}(x) + P_m(x) & P_m(x) + P_{m+1}(x) \\ P_m(x) + P_{m+1}(x) & P_{m+1}(x) + P_{m+2}(x) \end{vmatrix} < 0$$

besitzen. Um dies zu entscheiden, betrachten wir mit $\varphi_m(x) + \varphi_{m+1}(x) = \psi_m(x)$ [oder den arithmetischen Mitteln $\frac{1}{2}\psi_m(x)$] gleich allgemeiner die Hankelsche Determinante

$$(1.3) \qquad \Delta_m(x) = \begin{vmatrix} \psi_{m-1} & \psi_m \\ \psi_m & \psi_{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{m-1} + \varphi_m & \varphi_m + \varphi_{m+1} \\ \varphi_m + \varphi_{m+1} & \varphi_{m+1} + \varphi_{m+2} \end{vmatrix}$$

der Summen benachbarter Mitglieder einer Folge $\Phi(x)$ von Funktionen $\varphi_m(x)$, über die wir alsbald passende Annahmen einführen werden. Die

---

1, 1) Vgl. *T. H. Gronwall*, Math. Ann. 74 (1913), 223; 75 (1914), 340. — *E. W. Hobson*, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics (Cambridge 1931), S. 333.

1, 2) Siehe dazu *P. Turán*, Časopis Mat. Fys. Praha 75 (1950), 113—122. Vgl. — auch wegen der reichhaltigen Quellenangaben — *A. E. Danese*, Ann. Mat. pura appl. (4) 38 (1954), 339—348.

— reelle — unabhängige Veränderliche x bleibe, wo es angeht, unbezeichnet. — Man zerlegt (1.3) in

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \varphi_{m-1} & \varphi_m \\ \varphi_m & \varphi_{m+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_m & \varphi_m \\ \varphi_{m+1} & \varphi_{m+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{m-1} & \varphi_m \\ \varphi_{m+1} & \varphi_{m+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_m & \varphi_{m+1} \\ \varphi_{m+1} & \varphi_{m+2} \end{vmatrix}.$$

Die erste und letzte dieser vier Determinanten ist von Hankelscher Art, die zweite null, die dritte sei — wegen der Art der Zeigerfolge — für die Zwecke dieser Mitteilung kurz eine *aufsteigende* Determinante genannt. Eine solche, mit der Folge $\{P_m(x)\}$ in $-1 < x < 1$ gebildet, begegnet zuerst in einer Arbeit von *Forsythe*[1, 3]. — Nach Vorstehendem gilt

Satz 1: Wenn die Funktionen $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eine Turánsche Folge bilden (d. h. wenn alle

$$D_m(x) = \varphi_{m-1}\varphi_{m+1} - \varphi_m^2 < 0 \tag{1.4}$$

sind in einem von m unabhängigen Spielraum X der Veränderlichen x), ferner aber auch eine Forsythesche Folge, d. h. wenn für $m = 0, 1, 2, \ldots$ alle aufsteigenden Determinanten

$$A_m(x) = \varphi_m(x)\varphi_{m+3}(x) - \varphi_{m+1}(x)\varphi_{m+2}(x) < 0 \tag{1.5}$$

sind in X, so sind dort auch alle $\Delta_m(x)$ (1.3) negativ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Nun bilden $\varphi_m(x) = P_m(x)$ in $-1 < x < 1$, wie erwähnt, eine Turánsche, und in $0 < x < 1$ eine Forsythesche Folge[1, 3]; mithin ergibt sich

Satz 2: Die Funktionen $P_m(x) + P_{m+1}(x)$ bilden für $m = 1, 2, \ldots$[1, 4] in $0 < x < 1$ eine Turánsche Folge.

In $-1 < x < 0$ gilt der soeben gezogene Schluß nicht, weil dort die aufsteigende Determinante der $P_m(x)$ — als ungerade Funktion — positiv ist.

Im folgenden werde ich, nicht nur zum Gebrauche des Satzes 1, aufsteigende Determinanten naheliegender Funktionenklassen, namentlich elliptischer Funktionen, ausrechnen und ihr Vorzeichen erörtern.

2. Von den Legendreschen gehe ich zu den Tschebyscheffschen Polynomen erster Art $T_m(x) = \cos m\,\theta$ und zweiter Art $U_m(x) = \sin(m+1)\,\theta / \sin\theta$ mit $\cos\theta = x$ über $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Sie bilden in $(-1, 1)$ je eine Turánsche Folge[2, 1]; es gilt aber auch

Satz 3: Die Polynome $T_m(x)$, $U_m(x)$ stellen in (0,1) je eine Forsythesche Folge dar.

[1, 3] *G. E. Forsythe*, Duke math. J. 18 (1951), 361—371, § 2.

[1, 4] Gilt mit $P_{-1}(x) = 0$ auch für $m = 0$.

Wie man leicht nachrechnet, gilt für $m = 0, 1, 2, \ldots$ nämlich

$$\begin{vmatrix} T_m & (\cos\theta)\, T_{m+1}(\cos\theta) \\ T_{m+2}(\cos\theta) & T_{m+3}(\cos\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos m\,\theta & \cos(m+1)\,\theta \\ \cos(m+2)\,\theta & \cos(m+3)\,\theta \end{vmatrix} = -2\sin^2\theta\cos\theta;$$

diese aufsteigende Determinante ist also negativ in $0 < \theta < \pi/2$. Entsprechend ist

$$\begin{vmatrix} U_m & (\cos\theta)\, U_{m+1}(\cos\theta) \\ U_{m+2}(\cos\theta) & U_{m+3}(\cos\theta) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2\theta} \begin{vmatrix} \sin(m+1)\,\theta & \sin(m+2)\,\theta \\ \sin(m+3)\,\theta & \sin(m+4)\,\theta \end{vmatrix} = -2\cos\theta,$$

also auch negativ in $0 < \theta < \pi/2$. — Satz 1 und 3 ergeben zusammen, daß die Polynome $T_m(x) + T_{m+1}(x)$, $U_m(x) + U_{m+1}(x)$ in (0,1) je eine Turánsche Folge bilden. Zu dieser Feststellung bedürfte es freilich der Sätze 1, 3 nicht, denn es ist

$$(2.1)\quad T_m(x) + T_{m+1}(x) = \cos m\,\theta + \cos(m+1)\,\theta = 2\cos(m+\tfrac{1}{2})\,\theta\cos\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

$$(2.2)\quad U_m(x) + U_{m+1}(x) = \frac{\sin(m+1)\,\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin(m+2)\,\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(m+{}^3/_2)\,\theta}{\sin\tfrac{1}{2}\,\theta},$$

und $\{\cos(m+\tfrac{1}{2})\,\theta\}$, $\{\sin(m+\tfrac{1}{2})\,\theta\}$ sind (außer für $\theta = 0, \pi$) Turánsche Folgen: als Wert von (1.4) ergibt sich nach[2, 1] b) bei beiden $D_m(\cos\theta) = -\sin^2\theta$.

Auf dem Geradenteil $x > 1$, $x = \mathfrak{Cof}\,\theta$, auf dem $T_m(x) = \mathfrak{Cof}\,m\,\theta$, $U_m(x) = \mathfrak{Sin}\,(m+1)\,\theta/\mathfrak{Sin}\,\theta$ ist, erhält man

$$\begin{vmatrix} T_{m-1}(x) & T_m(x) \\ T_m(x) & T_{m+1}(x) \end{vmatrix} = \mathfrak{Sin}^2\,\theta, \quad \begin{vmatrix} U_{m-1}(x) & U_m(x) \\ U_m(x) & U_{m+1}(x) \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} T_m(x) & T_{m+1}(x) \\ T_{m+2}(x) & T_{m+3}(x) \end{vmatrix} = 2\,\mathfrak{Sin}^2\,\theta\,\mathfrak{Cof}\,\theta, \quad \begin{vmatrix} U_m(x) & U_{m+1}(x) \\ U_{m+2}(x) & U_{m+3}(x) \end{vmatrix} = -2\,\mathfrak{Cof}\,\theta.$$

Die Hankelschen (1.4) und die aufsteigenden Determinanten (1.5) der Folge $\{T_m(x)\}$ sind also positiv[2, 2], die der Folge $\{U_m(x)\}$ negativ; daher sind für $x > 1$ auch die Hankelschen Determinanten der Folge $\{T_m(x) + T_{m+1}(x)\}$ positiv, die der Folge $\{U_m(x) + U_{m+1}(x)\}$ negativ.

2, 1) Siehe a) *Danese* [1, 2], der dies (S. 342—344) aus den Ergebnissen über Gegenbauersche Polynome durch Besonderung ihrer Parameter herleitet. — b) *L. Koschmieder*, Boll. Un. mat. Ital. (3) 9 (1954), 266—270; dort ein unmittelbar auf die T_m, U_m bezüglicher, durch den Gebrauch der Veränderlichen θ (statt x) besonders kurzer Beweis.

2, 2) Folgt (mit entsprechender Aussage für $x < -1$) auch aus Ergebnissen von *E. F. Beckenbach*, *W. Seidel* und *O. Szász*, Duke math. J. 18 (1951), 1—10 (dort Satz 4, §§ 7, 9).

Ihre Werte $4\,\mathfrak{Sin}^2\,\theta\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\theta}{2}$, $-4\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\theta}{2}$ lassen sich natürlich am einfachsten aus den Ausdrücken

$$T_m(x)+T_{m+1}(x)=2\,\mathfrak{Cof}\,(m+\tfrac{1}{2})\,\theta\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{2}\theta,\ U_m(x)+U_{m+1}(x)=\frac{\mathfrak{Sin}\,(m+{}^3/_2)\,\theta}{\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\theta}$$

entnehmen. — An die entsprechende Darstellung hält man sich auf dem Geradenteil $x<-1$; mit $x=-\mathfrak{Cof}\,\theta$ lautet sie

$$T_m(x)=(-1)^m\,\mathfrak{Cof}\,m\,\theta,\ U_m(x)=(-1)^m\,\mathfrak{Sin}\,(m+1)\,\theta/\mathfrak{Sin}\,\theta,$$

$$T_m(x)+T_{m+1}(x)=2(-1)^{m+1}\,\mathfrak{Sin}(m+\tfrac{1}{2})\,\theta\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

$$U_m(x)+U_{m+1}(x)=(-1)^{m+1}\frac{\mathfrak{Cof}\,(m+{}^3/_2)\,\theta}{\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{2}\,\theta}.$$

Aus ihnen folgt, daß auf $x<-1$ die Hankelschen Determinanten der Folge $\{T_m(x)+T_{m+1}(x)\}$ negativ, die der Folge $\{U_m(x)+U_{m+1}(x)\}$ positiv sind. Sie haben die Werte $-4\,\mathfrak{Sin}^2\,\theta\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\theta}{2}$, $4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\theta}{2}$.

3. Mit (2.1), (2.2) streifte ich schon die Polynome

$$V_m(x)=\frac{\sin\,(2\,m+1)\,\theta/2}{\sin\,(\theta/2)}, \tag{3.1}$$

$$W_m(x)=\frac{\cos\,(2\,m+1)\,\theta/2}{\cos\,(\theta/2)} \tag{3.2}$$

in $x=\cos\theta$, die bis auf je einen nur von m abhängigen Malteil mit den Jacobischen Polynomen $P_m^{(-1/2,\,1/2)}(x)$, $P_m^{(1/2,\,-1/2)}(x)$ übereinstimmen[3, 1]. Wegen des späteren Übergangs zu elliptischen Funktionen (§ 6) lasse man den allen $V_m(x)$ $[W_m(x)]$ gemeinsamen Nenner $\sin\,(\theta/2)$ $[\cos\,(\theta/2)]$ weg, betrachte also die Funktionen

$$\mathfrak{V}_m(\theta)=\sin\,(m+\tfrac{1}{2})\,\theta, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{W}_m(\theta)=\cos\,(m+\tfrac{1}{2})\,\theta \tag{3.4}$$

von θ. Beide bilden, wie schon nach (2.1), (2.2) erwähnt, Turánsche Folgen. Als Wert von (1.5) ergibt sich für $m=0,1,2,\ldots$ nach einiger Rechnung

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{V}_m(\theta) & \mathfrak{V}_{m+1}(\theta)\\ \mathfrak{V}_{m+2}(\theta) & \mathfrak{V}_{m+3}(\theta)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathfrak{W}_m(\theta) & \mathfrak{W}_{m+1}(\theta)\\ \mathfrak{W}_{m+2}(\theta) & \mathfrak{W}_{m+3}(\theta)\end{vmatrix}=-2\sin^2\theta\cos\theta,$$

also Satz 4: Die Funktionen $\mathfrak{V}_m(\theta)$, $\mathfrak{W}_m(\theta)$ bilden in den Gebieten $(4\,l-1)\,\pi/2<\theta<(4\,l+1)\,\pi/2$ mit ganzen l jeweils eine Forsythesche

[3, 1] Siehe *G. Szegö*, Orthogonal polynomials (New York 1939), S. 59.

Folge. Daß die Summen $\mathfrak{V}_m + \mathfrak{V}_{m+1}$, $\mathfrak{W}_m + \mathfrak{W}_{m+1}$ (außer für $\theta = l\pi$) Turánsche Folgen bilden, sieht man unmittelbar, denn es ist

$$\mathfrak{V}_{m-1}(\theta)+\mathfrak{V}_m(\theta)=2\sin m\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta,\ \mathfrak{W}_{m-1}(\theta)+\mathfrak{W}_m(\theta)=2\cos m\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

und von den Folgen $\{\sin m\theta\}$, $\{\cos m\theta\}$ weiß man [2, 1) b)], daß sie von Turánscher Art sind.

4. Hier und weiterhin seien u, v, w reell. — Von der Stelle $v = 0$ abgesehen, bilden die Funktionen $\mathfrak{Tg}\, mv$ eine Turánsche Folge[4, 1)]; es ist sogar allgemeiner

$$(4.1)\quad \mathfrak{H}(u,v)=\begin{vmatrix} \mathfrak{Tg}(u-v) & \mathfrak{Tg}\,u \\ \mathfrak{Tg}\,u & \mathfrak{Tg}(u+v)\end{vmatrix} = -\frac{\mathfrak{Tg}^2 v(1-\mathfrak{Tg}^4 u)}{1-\mathfrak{Tg}^2 u\,\mathfrak{Tg}^2 v} < 0,$$

wenn $v \neq 0$. Ich beweise jetzt, *daß* dann *auch*

$$(4.2)\qquad \mathfrak{A}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathfrak{Tg}(u-3v) & \mathfrak{Tg}(u-v) \\ \mathfrak{Tg}(u+v) & \mathfrak{Tg}(u+3v)\end{vmatrix} < 0$$

ist. Nach dem Summensatz der Funktion $\mathfrak{Tg}\, w$ findet man nämlich zunächst

$$\mathfrak{A}(u,v) = \frac{(\mathfrak{Tg}^2 v - \mathfrak{Tg}^2 3v)(1-\mathfrak{Tg}^4 u)}{(1-\mathfrak{Tg}^2 u\,\mathfrak{Tg}^2 v)(1-\mathfrak{Tg}^2 u\,\mathfrak{Tg}^2 3v)}.$$

Ihre Verdreifachungsformel[4, 2)] führt den ersten Malteil des Zählers in

$$(\mathfrak{Tg}\, v + \mathfrak{Tg}\, 3v)(\mathfrak{Tg}\, v - \mathfrak{Tg}\, 3v) = -8\,\mathfrak{Tg}^2 v\,\frac{1-\mathfrak{Tg}^4 v}{(1+3\,\mathfrak{Tg}^2 v)^2}$$

über; aus seinem stets negativen Zeichen folgt (4.2). — Setzt man dort

$$(4.3)\qquad u = (m + {}^3/_2)\,w,\ v = \tfrac{1}{2}w,$$

so erhält man den

Satz 5: Mit Ausnahme des Wertes $w = 0$ bilden die Funktionen $\mathfrak{Tg}\, mw$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) auch eine Forsythesche, die Funktionen

$$\mathfrak{Tg}\, mw + \mathfrak{Tg}\,(m+1)w = \frac{\mathfrak{Sin}\,(2m+1)w}{\mathfrak{Cof}\, mw\,\mathfrak{Cof}\,(m+1)w}$$

mithin eine Turánsche Folge.

5. Die Funktionen $\mathfrak{Sec}\, mv$ (mit $\mathfrak{Sec}\, z = 1/\mathfrak{Cof}\, z$) bilden, außer für $v=0$, eine Turánsche Folge[4, 1)]; es gibt *ein Seitenstück* zu (4.1) [s. die

---

4, 1) *L. Koschmieder*, a) J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 60 (1957), *3—6*, § 5. — b) Arch. der Math. 9 (1958), 183—185. Der Grenzfall dortiger Gleichung (4.1) für $k = 1$ ist die folgende obige Formel.

4, 2) Vgl. z. B. *E. Jahnke* und *F. Emde*, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven (Leipzig 1909), S. 9.

letzte Formel von [4, 1] b)], aber auch *zu* (4.2), und zwar

$$(5.1)\qquad \mathfrak{A}(u,v)=\begin{vmatrix}\mathfrak{Sec}\,(u-3v) & \mathfrak{Sec}\,(u-v)\\ \mathfrak{Sec}\,(u+v) & \mathfrak{Sec}\,(u+3v)\end{vmatrix}<0,\ \text{wenn } v\neq 0.$$

Die Anwendung des Summensatzes der Funktion $\mathfrak{Cof}\,z$ liefert nämlich

$$\mathfrak{A}(u,v)=\frac{\mathfrak{Sin}^2 v-\mathfrak{Sin}^2 3v}{(\mathfrak{Cof}^2 u+\mathfrak{Sin}^2 v)\,(\mathfrak{Cof}^2 u+\mathfrak{Sin}^2 3v)};$$

nach ihrer Verdreifachungsformel[4,2] wird aber der Zähler

$$(\mathfrak{Sin}\,v+\mathfrak{Sin}\,3v)\,(\mathfrak{Sin}\,v-\mathfrak{Sin}\,3v)=-2\,\mathfrak{Sin}^2 2v\,\mathfrak{Cof}\,2v$$

als negativ erkannt, womit (5.1) bewiesen ist. — Bei der Annahme (4.3) folgt

Satz 6: Vom Werte $w=0$ abgesehen, bilden die Funktionen $\mathfrak{Sec}\,mw$ auch eine Forsythesche, die Funktionen

$$\mathfrak{Sec}\,mw+\mathfrak{Sec}\,(m+1)w=2\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{2}w\,\frac{\mathfrak{Cof}\,(m+\tfrac{1}{2})w}{\mathfrak{Cof}\,mw\,\mathfrak{Cof}\,(m+1)w}$$

mithin eine Turánsche Folge.

6. Die Funktionen $\sin w$, $\cos w$; $\mathfrak{Tg}\,w$, $\mathfrak{Sec}\,w$ sind die Grenzfälle $k=0$, $k=1$ der elliptischen Funktionen Jacobis mit echtem positivem Modul k. Die Tatsache, daß sowohl $\sin mw+\sin(m+1)w$, $\cos mw+\cos(m+1)w$ (§ 2) als auch $\mathfrak{Tg}\,mw+\mathfrak{Tg}\,(m+1)w$ (§ 4), $\mathfrak{Sec}\,w+\mathfrak{Sec}\,(m+1)w$ (§ 5) Turánsche Folgen bilden, läßt erwarten, daß dies auch auf die Funktionen $\mathrm{sn}\,mw+\mathrm{sn}\,(m+1)w$, $\mathrm{cn}\,mw+\mathrm{cn}\,(m+1)w$ zutrifft. Es soll jetzt gezeigt werden. — Daß $\{\mathrm{sn}\,mw\}$ eine Turánsche Folge ist, habe ich früher bewiesen[6, 1]. Der Nachweis, daß $\{\mathrm{sn}\,mw\}$ *in gewissen Gebieten auch eine Forsythesche Folge* ist, erfordert eine etwas längere Betrachtung, in die ich jetzt eintrete. Ich werde allgemeiner zeigen, daß *für alle u* die Determinante

$$(6.1)\qquad \mathfrak{A}(u,v)=\begin{vmatrix}\mathrm{sn}\,(u-3v) & \mathrm{sn}\,(u-v)\\ \mathrm{sn}\,(u+v) & \mathrm{sn}\,(u+3v)\end{vmatrix}<0\quad \textit{ist in}$$

$$(6.2)\qquad (4l-1)K/2<v<2lK,\ 2lK<v<(4l+1)K/2,$$

wo l ganz, und $\mathfrak{A}(u,2lK)=0$; *dagegen*

$$(6.3)\quad \mathfrak{A}(u,v)>0\quad \textit{in}\quad (6.4)\quad (4l+1)K/2<v<(4l+3)K/2$$

außer $\mathfrak{A}[u,(2l+1)K]=0$.

[6, 1] Siehe [4, 1] a). — Wie dort benutze ich die bei der Verwendung der Jacobischen Funktionen feststehenden Zeichen.

Die Anwendung einer Folgerung aus dem Summensatze[6, 2] der Funktion sn w auf die beiden Glieder von (6.1) liefert

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 3v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 3v} - \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

vereinigt

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 3v)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 3v)}. \tag{6.5}$$

Beide Malteile des Nenners und der zweite des Zählers sind positiv; es bleibt also nur das Vorzeichen seines ersten Malteiles $M(v) = R(v)\, S(v)$ zu erörtern, wo

$$R(v) = \operatorname{sn} v + \operatorname{sn} 3v, \tag{6.6}$$

$$S(v) = \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} 3v. \tag{6.7}$$

Die Zusätze zu (6.2), (6.4) bewahrheiten sich durch die Werte

$$R(l\,K) = 0, \tag{6.8}$$

$$S(2\,l\,K) = S[(l + \tfrac{1}{2})\,K] = 0. \tag{6.9}$$

Ist jenes Vorzeichen in dem Gebiete $0 < v < K/2$, das $\mathfrak{k}$ heiße, gefunden, so gilt es, weil $M(v)$ eine gerade, mit $2\,K$ periodische Funktion ist, auch in (6.2), — und, wenn man es im Gebiete $K/2 < v < K$, kurz in $\mathfrak{k}^*$, kennt, auch in (6.4). — Weiterhin seien sn v, cn v, dn v durch s, c, d abgekürzt. Nach der Verdreifachungsformel[6, 3] der Funktion sn w ist

$$R(v) = 4\,s\,\frac{\mathfrak{P}_1(s)}{\mathfrak{Q}(s)}, \tag{6.10}$$

$$S(v) = -2\,s\,\frac{\mathfrak{P}_2(s)}{\mathfrak{Q}(s)}, \tag{6.11}$$

wo

$$\mathfrak{P}_1(s) = 1 - (1 + k^2)\,s^2 + k^2(1 + k^2)\,s^6 - k^4\,s^8, \tag{6.12}$$

$$\mathfrak{P}_2(s) = 1 - 2(1 + k^2)\,s^2 + 6\,k^2\,s^4 - 2\,k^2(1 + k^2)\,s^6 + k^4\,s^8, \tag{6.13}$$

$$\mathfrak{Q}(s) = 1 - 6\,k^2\,s^4 + 4\,k^2(1 + k^2)\,s^6 - 3\,k^4\,s^8, \quad \text{und} \tag{6.14}$$

$$M(v) = R(v)\,S(v) = -8\,s^2\,\frac{\mathfrak{P}_1(s)\,\mathfrak{P}_2(s)}{[\mathfrak{Q}(s)]^2}. \tag{6.15}$$

Nun ist bei allen Werten von v

$$\mathfrak{P}_1(s) = (1 - k^2 s^4)\,c^2 d^2 > 0, \tag{6.16}$$

so auch in $\mathfrak{k}$. Um zu zeigen, daß dort auch

6, 2) Vgl. *A. G. Greenhill*, The applications of elliptic functions (London 1892), S. 138, (7).

6, 3) *Greenhill* 6, 2), S. 121.

$$\mathfrak{P}_2(s) = (1 - k\,s^2)^4 - 2(1-k)^2\,s^2(1 + k^2\,s^4) > 0 \tag{6.17}$$

ist, berechnet man die Ableitung dieser Funktion von v,

$$\mathfrak{P}_2'(s)\,\frac{ds}{dv} = -\,4[2\,k(1 - k\,s^2)^3 + (1-k)^2\,(1 + 3\,k^2\,s^4)]\,s\,c\,d; \tag{6.18}$$

sie ist in $0 < v < K$ immer negativ, $\mathfrak{P}_2(s)$ nimmt dort also beständig ab. Nun ist $\mathfrak{P}_2(0) = 1$; (6.17) wird daher bewiesen sein, wenn sich herausstellt, daß $\mathfrak{P}_2$ für $v = K/2$ verschwindet, also $\mathfrak{P}_2(\tilde{s}) = 0$ ist, wo $\tilde{s} = \operatorname{sn} K/2 = (1 + k')^{-1/2}$ ist[6, 4]. Das trifft aber zu, denn nach (6.15) ist

$$M(K/2) = -\,2\,K^2\,\frac{\mathfrak{P}_1(\tilde{s})\,\mathfrak{P}_2(\tilde{s})}{[\mathfrak{Q}(\tilde{s})]^2}; \tag{6.19}$$

da $M(K/2) = 0$ ist nach der zweiten Gleichung (6.9) für $l = 0$, und da $\mathfrak{P}_1(\tilde{s}) > 0$ ist nach (6.16), so muß $\mathfrak{P}_2(\tilde{s}) = 0$ sein, was sich auch unmittelbar bestätigen läßt. — Aus Vorstehendem geht hervor, daß (6.15) und daher auch (6.5) in $\mathfrak{k}$ negativ ist. — Im Bereich $K/2 \leqslant v \leqslant K$ nimmt $\mathfrak{P}_2(s)$ von 0 bis $-\,k'^4$ ab; folglich ist (6.15) und also auch (6.5) in $\mathfrak{k}^*$ positiv. — Hiermit ist alles über (6.1) Behauptete bewiesen. (6.1), (6.2) liefern bei dem Ansatz (4.3) — außer bei $w = 4\,l\,K$ —

$$A_m(w) = \begin{vmatrix} \operatorname{sn} mw & \operatorname{sn}(m+1)w \\ \operatorname{sn}(m+2)w & \operatorname{sn}(m+3)w \end{vmatrix} < 0 \text{ in} \tag{6.20}$$

$$(4l-1)\,K < w < (4\,l+1)\,K, \tag{6.21}$$

d. h. den Satz 7: In dem Gebiete (6.21), seine Mitte ausgenommen, bilden die Funktionen $\operatorname{sn} mw$ auch eine Forsythesche, die Summen $\operatorname{sn} mw + \operatorname{sn}(m+1)\,w$ also eine Turánsche Folge. In seiner Mitte und an seinem Rande verschwindet (6.20).

7. Zum Schluß werde ich entsprechend die — nach [4, 1] a) gleichfalls Turánsche—Folge $\{\operatorname{cn} mw\}$ behandeln und zuerst zeigen, daß für alle u in (6.2)

$$\mathfrak{A}(u, v) = \begin{vmatrix} \operatorname{cn}(u - 3\,v) & \operatorname{cn}(u - v) \\ \operatorname{cn}(u + v) & \operatorname{cn}(u + 3\,v) \end{vmatrix} < 0 \tag{7.1}$$

und $\mathfrak{A}(u, v) > 0$ ist in (6.4). Aus [6, 2], S. 138, (10) findet man

$$\operatorname{cn}(u_1 + u_2)\operatorname{cn}(u_1 - u_2) = \frac{\operatorname{cn}^2 u_1 - \operatorname{dn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2}; \tag{7.2}$$

[6, 4] *Greenhill* [6, 2], S. 120.

mit $u_1 = u$, $u_2 = 3\,v$ und $u_2 = v$ angewandt, ergibt (7.2) nach einigen Umformungen mit Hilfe der Gleichheit

$$\mathrm{dn}^2 u - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u \,\mathrm{cn}^2 u = \mathrm{dn}^4 u + k^2 k'^2 \,\mathrm{sn}^4 u$$

für $\mathfrak{A}$ den Wert

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{(\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 3\,v)\,(\mathrm{dn}^4 u + k^2 k'^2 \,\mathrm{sn}^4 u)}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u \,\mathrm{sn}^2 v)\,(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u \,\mathrm{sn}^2 3\,v)}. \tag{7.3}$$

Beide Malteile des Nenners und der zweite des Zählers sind positiv; der erste ist die in § 6 behandelte Funktion $M(v)$ (6.15). Ihr dort festgestelltes Vorzeichen — in $\mathfrak{k}$ negativ, in $\mathfrak{k}^*$ positiv — erweist die Behauptung (7.1) über $\mathfrak{A}$ als richtig. — Mit den Werten (4.3) folgt daraus außer bei $w = 4\,l\,K$, daß

$$A_m(w) = \begin{vmatrix} \mathrm{cn}\, mw & \mathrm{cn}\,(m+1)\,w \\ \mathrm{cn}\,(m+2)\,w & \mathrm{cn}\,(m+3)\,w \end{vmatrix} < 0 \text{ ist in (6.21), also}$$

Satz 8: Die Funktionen $\mathrm{cn}\, mw$ bilden dort mit Ausnahme der Werte $A_m(4\,l\,K) = 0$ auch eine Forsythesche, die Summen $\mathrm{cn}\, mw + \mathrm{cn}\,(m+1)\,w$ also eine Turánsche Folge.

Über die Lösung linearer homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen

Von

Peter Lesky, Innsbruck

(Eingegangen am 2. Oktober 1959)

Der Zusammenhang zwischen den hypergeometrischen Funktionen und den Differenzengleichungen ist bereits vielfach untersucht worden. Er drückt sich am einfachsten in den bekannten Gaußschen Formeln aus, die nichts anderes als lineare homogene Differenzengleichungen 2. Ordnung für die hypergeometrischen Funktionen sind. Man kann nun annehmen, daß es eine ganze Klasse von solchen Differenzengleichungen gibt, deren Lösungen sich durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken lassen.

Wir beschränken uns hier auf die Behandlung der häufig vorkommenden linearen homogenen Differenzengleichungen 2. Ordnung mit rationalen Koeffizienten und beschreiben eine einfache Methode zu deren Lösung, die ohne die sonst üblichen Operatoren — bzw. Laplacetransformationen rasch zum Ziele führt[1].

Diese Methode besteht aus einem Invariantenvergleich: Man verwandelt die gegebene Differenzengleichung und eine der oben erwähnten Gaußschen Rekursionsformeln durch eine einfache Transformation in die *normierte* Gestalt

$$\Delta^2 v_n + I_n v_n = 0, \quad n = s, s+1, s+2, \ldots \; (s = \text{ganz})$$

mit der *Invariante* I_n, und führt durch Invariantenvergleich die Lösung der gegebenen Differenzengleichung auf die hypergeometrischen Funktionen zurück.

---

[1] Diese bekannten Verfahren zur Lösung von linearen Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten findet man übersichtlich in [2], s. 434ff. (Operatormethoden) und [1], S. 316ff. bzw. [2], S. 478ff. (Laplacetransformation).

Das gelingt allgemein, wie im folgenden gezeigt werden soll, wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung linear vom Index n abhängen[2]. Interessante Anwendungen folgen unter anderen daraus für die Entwicklung von Produkten von Besselfunktionen[3].

§ 1. Verwandlung in eine normierte Differenzengleichung

1. Berechnung der Invariante I_n. — 2. Vergleich zweier Differenzengleichungen mit gleicher Invariante.

1. Wir beginnen mit der Differenzengleichung 2. Ordnung in der Form

$$p_n y_{n+2} + q_n y_{n+1} + r_n y_n = 0, \quad n = s, s+1, s+2, \ldots, \tag{1}$$

wo p_n q_n und r_n bekannte Funktionen von n sind; nach willkürlicher Festlegung der Anfangswerte y_s und y_{s+1} können alle folgenden y_n rekursiv berechnet werden.

Erklären wir die Differenzen in der üblichen Art

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \; \Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2 y_{n+1} + y_n, \ldots$$

und führen sie in (1) ein, so erhalten wir als zweite Form der Differenzengleichung

$$p_n \Delta^2 y_n + (2 p_n + q_n) \Delta y_n + (p_n + q_n + r_n) y_n = 0, \quad n = s, s+1, \ldots. \tag{2}$$

Wir ersetzen die Unbekannte y_n durch das Produkt

$$y_n = \varphi_n v_n, \qquad n = s, s+1, \ldots \tag{3}$$

---

[2] Hypergeometrische Lösungen von solchen Differenzengleichungen — gewöhnlich als Laplace'sche bezeichnet — findet man in [2], S. 494. Die Herleitung dieser Lösungen erfolgt dort ebenfalls mit Hilfe der Laplacetransformation, während in dieser Arbeit die hypergeometrischen Lösungen auf ganz elementare und vor allem sehr einfach anzuwendende Art abgeleitet werden.

[3] In der Arbeit [3] entwickelt *Ap Simon* den aus Besselfunktionen erster und zweiter Art gebildeten Ausdruck

$$J_n(ax)\; Y_n(bx) - Y_n(ax)\, J_n(bx)$$

in eine Potenzreihe nach x, deren Koeffizienten einer Differenzengleichung 2. Ordnung mit linearen Koeffizienten genügen und daher durch hypergeometrischen Funktionen (Kugelfunktionen) ausgedrückt werden können.

Dieses Resultat wurde in einer von *Margarethe Wurnig* am mathematischen Institut der Universität Innsbruck 1956 ausgearbeiteten Dissertation verallgemeinert. Es wurden die Potenzreihenentwicklungen für beliebige Produkte

$$Z_{\pm\nu}(ax) \,.\, Z_{\pm\nu}(bx)$$

zweier Besselfunktionen erster oder zweiter Art vom gleichen oder entgegengesetzten Index berechnet. So gilt z. B. die Entwicklung

$$J_\nu(ax)\, J_\nu(bx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\; P_{n+\nu}^{-\nu}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{4}\right)^{n+\nu} . x^{2n+2\nu}.$$

und können dann φ_n im allgemeinen so bestimmen, daß in der Differenzengleichung (2) der Koeffizient des Mittelgliedes verschwindet. Führen wir zu diesem Zweck (3) und die entsprechenden Differenzen in (2) ein, so bleibt für v_n die Differenzengleichung

$$p_n \varphi_{n+2} \Delta^2 v_n + (2 p_n \varphi_{n+2} + q_n \varphi_{n+1}) \Delta v_n + (p_n \varphi_{n+2} + q_n \varphi_{n+1} + r_n \varphi_n) v_n = 0, \qquad n = s, s+1, \ldots, \tag{4}$$

in der das Mittelglied verschwindet, wenn

$$2 p_n \varphi_{n+2} + q_n \varphi_{n+1} = 0, \qquad n = s, s+1, \ldots \tag{5}$$

ist. In dieser zweigliedrigen Rekursionsformel ist φ_{s+1} frei wählbar, während φ_s überhaupt nicht vorkommt. Es wird daher zweckmäßig sein, falls p_{s-1} und q_{s-1} existieren und für $n = s-1, s, s+1, \ldots$ die Bedingung

$$p_n \cdot q_n \neq 0 \tag{6}$$

erfüllt ist, die Beziehung (5) auch für $n = s-1$ gelten zu lassen und $\varphi_s = C$ (konstant) zu setzen. Wir erhalten dann

$$\varphi_n = (-2)^{s-n} C \prod_{k=s-1}^{n-2} \frac{q_k}{p_k}, \qquad n = s+1, s+2, \ldots,$$

und indem wir dieses φ_n in die Differenzengleichung (4) einführen

$$\Delta^2 v_n + I_n v_n = 0, \qquad n = s, s+1, \ldots \tag{7}$$

mit der Invariante

$$I_n = \frac{4 r_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}} - 1. \tag{8}$$

Durch die geeignete Wahl des Anfangsindex s können wir dann in vielen Fällen die Erfüllung der Bedingung (6) für $n = s-1, s, s+1, \ldots$ erreichen[4].

2. Liegen zwei verschiedene Differenzengleichungen

$$p_n y_{n+2} + q_n y_{n+1} + r_n y_n = 0, \quad p_n^* y_{n+2}^* + q_n^* y_{n+1}^* + r_n^* y_n^* = 0$$
$$n = s, s+1, s+2, \ldots$$

vor, die in der normierten Gestalt und daher in den Invarianten übereinstimmen, dann sind auch die allgemeinen Lösungen der normierten Gleichungen v_n und v_n^* gleich und es gilt der

[4] Dies gelingt vor allem immer dann, wenn p_n und q_n als rationale Funktionen in n vorausgesetzt werden.

Satz 1: *Gehören zu zwei Differenzengleichungen 2. Ordnung dieselben Invarianten, dann gibt es zu jeder Lösung y_n^* der zweiten Differenzengleichung eine Lösung y_n der ersten Differenzengleichung, sodaß die Gleichungen*

$$y_s = D\, y_s^*, \quad y_n = D\, y_n^* \prod_{k=s-1}^{n-2} \frac{q_k\, p_k^*}{p_k\, q_k^*} \quad \text{für} \quad n = s+1, s+2, \ldots$$

bestehen (D = konstant).

Der Anfangsindex s ist hier so festzulegen, daß die Bedingung (6) für beide Differenzengleichungen ab $n = s-1$ erfüllt ist.

§ 2. Vergleich mit Differenzengleichungen für hypergeometrische Funktionen

1. Berechnung der Invarianten. — 2. Festlegung der freien Größen durch Koeffizientenvergleich. — 3. Sonderfälle. — 4. Zusammenstellung der Lösungen.

1. Unter den Koeffizienten p_n q_n und r_n wollen wir im folgenden lineare Funktionen von n verstehen, das heißt wir behandeln Differenzengleichungen der Form

$$(\alpha_1 n + \alpha_2)\, y_{n+2} + (\beta_1 n + \beta_2)\, y_{n+1} + (\gamma_1 n + \gamma_2)\, y_n = 0, \qquad (9)$$
$$n = s, s+1, s+2, \ldots,$$

mit den (eventuell komplexen) Zahlen α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 und γ_2. Unter der Annahme, daß durch eine entsprechende Wahl von s die Bedingung (6) erfüllt ist, erhalten wir aus (9) die normierte Differenzengleichung

$$\Delta^2 v_n + I_n \cdot v_n = 0, \qquad n = s, s+1, \ldots$$

mit der Invariante

$$I_n = \frac{4(\gamma_1 n + \gamma_2)(\alpha_1 n - \alpha_1 + \alpha_2)}{(\beta_1 n + \beta_2)(\beta_1 n - \beta_1 + \beta_2)} - 1, \qquad (10)$$

indem wir

$$v_n = (-2)^{n-s}\, C\, \frac{((s-1)\,\alpha_1 + \alpha_2;\, \alpha_1;\, n-s)}{((s-1)\,\beta_1 + \beta_2;\, \beta_1;\, n-s)}\, y_n, \quad n = s, s+1, \ldots$$

setzen[5].

Andererseits gilt für die hypergeometrische Funktion

$$F_{n+\varrho} = F(n+\varrho, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+\varrho;\, 1;\, k)\,(b;\, 1;\, k)}{(c;\, 1;\, k)\, k!}\, z^k$$

[5] Das Zeichen $(a; b; k)$ ist folgendermaßen erklärt

$$(a; b; k) = a(a+b)(a+2b) \ldots (a+(k-1)b).$$

die Gaußsche Relation[6]

$$(n+\varrho+1)(1-z)F_{n+\varrho+2}+[(z-2)(n+\varrho+1)-bz+c]F_{n+\varrho+1}+$$
$$+(n+\varrho+1-c)F_{n+\varrho}=0, \quad n=s, s+1, s+2, \ldots, \tag{11}$$

die sich unter der Voraussetzung[7] $\varrho \neq -s, -s-1, -s-2, \ldots$ in die Differenzengleichung

$$\Delta^2 v_n^* + I_n^* \cdot v_n^* = 0, \qquad n = s, s+1, s+2, \ldots$$

mit der Invariante

$$I_n^* = \frac{4(1-z)(n+\varrho+1-c)(n+\varrho)}{[(z-2)(n+\varrho+1)-bz+c]\,[(z-2)(n+\varrho)-bz+c]} - 1 \tag{12}$$

transformieren läßt, wenn man

$$v_n^* = [2(z-1)]^{n-s} C \frac{(s+\varrho;1;n-s)}{([z-2][s+\varrho]-bz+c;z-2;n-s)} F_{n+\varrho},$$
$$n = s, s+1, \ldots$$

setzt. Für $z=1$ wird zwar die transformierte Variable v_n^* null, aber auch die Differenzengleichung (11) reduziert sich auf eine solche erster Ordnung, was diesen Fall für unseren Invariantenvergleich von vornherein ausschließt.

2. In der Invariante (12) stehen uns vier frei wählbare Größen zur Verfügung: ϱ, b, c und z, die nun so festgelegt werden sollen, daß die Invariante (12) mit der Invariante (10) übereinstimmt. Bei dieser Festlegung berücksichtigen wir zunächst nicht die Einschränkungen, denen die Zahlen α_1, β_1 und γ_1 zu unterwerfen sind, sondern stellen diese erst im nächsten Punkt zusammen.

Damit die rechten Seiten von (12) und (10) gleich sind, müssen folgende vier Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{1-z}{(2-z)^2} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2}, \tag{13}$$

$$\varrho + 1 + \frac{bz-c}{2-z} = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \tag{14}$$

$$1 + 2\varrho - c = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1, \tag{15}$$

[6] Siehe etwa [5], S. 13 oder [6], S. 103.

[7] Diese Voraussetzung über ϱ muß zur Erfüllung der Bedingung (6) getroffen werden.

$$\varrho(1+\varrho-c)=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \tag{16}$$

Aus der quadratischen Gleichung in z (13) ergibt sich

$$z_{1,2}=\frac{4\,\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2\pm\beta_1\sqrt{\beta_1^2-4\,\alpha_1\gamma_1}}{2\,\alpha_1\gamma_1}, \tag{17}$$

und aus (15) und (16) die beiden Lösungspaare für ϱ und c

$$\varrho_1=\frac{\gamma_2}{\gamma_1},\qquad c_1=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2; \tag{18}$$

$$\varrho_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1,\qquad c_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \tag{19}$$

Setzt man das aus (15) berechnete ϱ in (14) ein, so findet man

$$b=\frac{c}{2}+\frac{2-z}{z}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}-\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}-\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}\right)$$

und daher letzten Endes für b

$$\begin{aligned} b_{1,2}&=\frac{c_1}{2}\pm\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2-4\,\alpha_1\gamma_1}}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}-\frac{\gamma_2}{2\,\gamma_1}-\frac{\alpha_2}{2\,\alpha_1}\right),\\ b_{3,4}&=\frac{c_2}{2}\pm\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2-4\,\alpha_1\gamma_1}}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}-\frac{\gamma_2}{2\,\gamma_1}-\frac{\alpha_2}{2\,\alpha_1}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Übereinstimmung der Invarianten (12) und (10) erreichen wir daher mit folgenden hypergeometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{n+\varrho_1}&=F(n+\varrho_1,b_1;c_1;z_1), & F^{(3)}_{n+\varrho_2}&=F(n+\varrho_2,b_3;c_2;z_1),\\ F^{(2)}_{n+\varrho_1}&=F(n+\varrho_1,b_2;c_1;z_2), & F^{(4)}_{n+\varrho_2}&=F(n+\varrho_2,b_4;c_2;z_2). \end{aligned} \tag{21}$$

3. In diesem Punkt sollen kurz die Einschränkungen untersucht werden, denen die Zahlen α_1, β_1 und γ_1 zu unterwerfen sind, damit das soeben beschriebene Verfahren durchgeführt werden kann.

a) $\alpha_1 \neq 0$ *und* $\gamma_1 \neq 0$ *muß vorausgesetzt werden.*
Ist nämlich $\alpha_1 \cdot \gamma_1 = 0$, dann ergibt sich aus (13) $z = 1$ und die Rekursionsformel (11) ist nicht mehr dreigliedrig; der Invariantenvergleich kann, wie bereits in Punkt 1 besprochen, nicht durchgeführt werden.

b) *Ist* $\beta_1 = 0$, *dann ist das Verfahren durchführbar.*
In der Invariante (10) entfallen im Nenner die Glieder mit n; damit das auch bei der Invariante (12) der Fall ist, muß $z = 2$ gesetzt werden.

Für ϱ und c ergeben sich dieselben Lösungspaare (18) und (19) wie im allgemeinen Fall, während man für b

$$b_{1,2} = \frac{c_1}{2} \pm \frac{\beta_2}{2\sqrt{-\alpha_1 \gamma_1}}, \qquad b_{3,4} = \frac{c_2}{2} \pm \frac{\beta_2}{2\sqrt{-\alpha_1 \gamma_1}} \tag{20'}$$

erhält. Auch in diesem Sonderfall gibt es vier Möglichkeiten, die Übereinstimmung der Invarianten zu erreichen; in den vier hypergeometrischen Funktionen (21) ist nur $z_1 = z_2 = 2$ und b entsprechend (20′) zu setzen.

c) *Ist* $\beta_1^2 - 4\,\alpha_1 \gamma_1 = 0$, *dann muß der Invariantenvergleich mit der konfluenten hypergeometrischen Funktion durchgeführt werden.*
Für die konfluente hypergeometrische Funktion

$$\Phi_{n+\varrho} = \Phi(n+\varrho; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+\varrho; 1; k)}{(c; 1; k)\, k!} z^k$$

gilt die Differenzengleichung[8]

$$(n+\varrho+1)\,\Phi_{n+\varrho+2} + (c - z - 2n - 2\varrho - 2)\,\Phi_{n+\varrho+1} + \\ + (n+\varrho+1-c)\,\Phi_{n+\varrho} = 0, \qquad n = s, s+1, s+2, \ldots, \tag{22}$$

die sich unter der Voraussetzung $\varrho \neq -s, -s-1, -s-2, \ldots$ in die normierte Gestalt mit der Invariante

$$I_n^* = \frac{4(n+\varrho+1-c)(n+\varrho)}{[2(n+\varrho+1)+z-c]\,[2(n+\varrho)+z-c]} - 1 \tag{23}$$

transformieren läßt, wenn man wie im allgemeinen Fall

$$v_n^* = (-2)^{n-s} E \frac{(s+\varrho; 1; n-s)}{(c-z-2\varrho-2s; -2; n-s)} \Phi_{n+\varrho}, \quad n = s, s+1, s+2, \ldots$$

setzt (E = konstant). Wiederum erhält man vier Bedingungen, damit die Invarianten (10) und (23) übereinstimmen:

Die erste dieser Bedingungen ist

$$4\,\alpha_1 \gamma_1 = \beta_1^2$$

und durch die in c) gemachte Voraussetzung bereits erfüllt. Zwei weitere Bedingungen sind identisch mit (15) und (16), während die vierte die Form

$$\varrho + 1 + \frac{z-c}{2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \tag{24}$$

[8] Siehe etwa [5], S. 112 oder [6], S. 254.

hat. Demnach ergeben sich wieder dieselben Wertepaare für ϱ und c; für z findet man aus (24)

$$z = \frac{2\beta_2}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \tag{25}$$

Wir erreichen daher mit den zwei konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$\Phi^{(1)}_{n+\varrho_1} = \Phi(n+\varrho_1; c_1; z) \qquad \Phi^{(2)}_{n+\varrho_2} = \Phi(n+\varrho_2; c_2; z) \tag{26}$$

die Übereinstimmung der beiden Invarianten.

4. Haben wir in den beiden vorhergehenden Punkten die Größen z, b, c und ϱ so bestimmt, daß eine Übereinstimmung der beiden Invarianten (10) und (12), beziehungsweise (23) vorliegt, so können wir jetzt auf Grund des Satzes 1 sofort den Zusammenhang zwischen den Lösungen der allgemeinen dreigliedrigen Differenzengleichung mit linearen Koeffizienten und der hypergeometrischen, beziehungsweise konfluenten hypergeometrischen Funktion angeben.

Für den allgemeinen Fall (und $\beta_1 = 0$) erhalten wir die vier Möglichkeiten

$$y_n^{(1,2)} = C \left\{ \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1}}{2\gamma_1} \right\}^{n-s} \frac{(s\gamma_1+\gamma_2; \gamma_1; n-s)}{((s-1)\alpha_1+\alpha_2; \alpha_1; n-s)} F^{(1,2)}_{n+\varrho_1},$$

$$y_n^{(3,4)} = C \left\{ \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1}}{2\alpha_1} \right\}^{n-s} F^{(3,4)}_{n+\varrho_2}, \tag{27}$$

$$n = s, s+1, s+2, \ldots$$

unter der Voraussetzung $\varrho \neq -s, -s-1, -s-2, \ldots$ (vgl. Anmerkung 7). Die beiden Vorzeichen vor den Wurzeln entsprechen dem z_1 und dem z_2 und zwar so, daß das obere Vorzeichen zum z_1, das untere zum z_2 gehört.

Für den Fall $\beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1 = 0$ erhalten wir zwei Möglichkeiten

$$y_n^{(1)} = C \left\{ -\frac{\beta_1}{2\gamma_1} \right\}^{n-s} \frac{(s\gamma_1+\gamma_2; \gamma_1; n-s)}{((s-1)\alpha_1+\alpha_2; \alpha_1; n-s)} \Phi^{(1)}_{n+\varrho_1},$$

$$y_n^{(2)} = C \left\{ -\frac{\beta_1}{2\alpha_1} \right\}^{n-s} \Phi^{(2)}_{n+\varrho_2}, \tag{28}$$

$$n = s, s+1, s+2, \ldots$$

unter derselben Voraussetzung über ϱ.

§ 3. Fundamentalsystem von Lösungen

1. Theorem von Casorati. — 2. Lineare Abhängigkeit im allgemeinen Fall zwischen 1. und 2. bzw. 3. und 4. Lösung. — 3. Sonderfall $c_1 = c_2 = 1$.

1. Von entscheidender Bedeutung ist nun die Beantwortung der Frage, ob sich unter den in (27) bzw. (28) angegebenen Lösungen zwei linear unabhängige befinden, d. h. ob diese Lösungen bereits ein Fundamentalsystem bilden.

Ein solches Fundamentalsystem liegt in unserem Fall dann vor, wenn die Determinante

$$D_s^{(i,k)} = \begin{vmatrix} y_s^{(i)} & y_s^{(k)} \\ y_{s+1}^{(i)} & y_{s+1}^{(k)} \end{vmatrix} \quad i, k = 1, 2, 3, 4; i \neq k \tag{29}$$

von Null verschieden ist (Theorem von Casorati)[9].

Sind hingegen alle Lösungen voneinander linear abhängig, dann kann auf bekannte Art und Weise durch Produktbildung

$$y_n = y_n^{(1)} \cdot z_n \tag{30}$$

die Differenzengleichung zweiter Ordnung in y_n auf eine solche erster Ordnung in z_n reduziert werden. Die Lösungen y_n und $y_n^{(1)}$ aus (30) bilden dann wieder ein Fundamentalsystem[10].

2. Bei der allgemeinen Untersuchung der Determinante (29) ergeben sich Schwierigkeiten, die nur in zwei einfachen Fällen und unter einschränkenden Voraussetzungen nicht eintreten. Wir beweisen zunächst den

Satz 2: *Die Lösungen $y_n^{(1)}$ und $y_n^{(2)}$ aus (27) sind linear abhängig, wenn c_1 nicht null und keine negative ganze Zahl ist, die Lösungen $y_n^{(3)}$ und $y_n^{(4)}$ aus (27) sind linear abhängig, wenn c_2 nicht null und keine negative ganze Zahl ist.*

Zum Beweis wenden wir die unter der Voraussetzung c nicht null und keine negative ganze Zahl geltende Transformationsformel für die hypergeometrische Funktion[11]

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{-a} F(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}) \tag{31}$$

---

[9] Die Nullstellen der Koeffizienten der Differenzengleichung werden bereits durch die geeignete Wahl von s aus dem Bereich des Invariantenvergleiches ausgeschlossen. Zum Theorem v. Casorati vgl. [3], S. 275 oder [4], S. 354.

[10] Siehe z. B. [5], S. 289 oder [6], S. 367.

[11] Diese zur analytischen Fortsetzung der hypergeometrischen Funktionen verwendeten Beziehungen findet man z. B. in [5], S. 13 oder [6], S. 64.

auf $F^{(2)}_{n+\varrho_1}$ und $F^{(4)}_{n+\varrho_2}$ an und erhalten

$$F^{(2)}_{n+\varrho_1} = (1 - z_2)^{-\varrho_1 - n} F^{(1)}_{n+\varrho_1}$$

für c_1 nicht null und keine negative ganze Zahl,

$$F^{(4)}_{n+\varrho_2} = (1 - z_2)^{-\varrho_2 - n} F^{(3)}_{n+\varrho_2}$$

für c_2 nicht null und keine negative ganze Zahl.
Ersetzen wir mit Hilfe dieser Formeln $y^{(2)}_n$ in $D^{(1,2)}_s$ durch $y^{(1)}_n$, beziehungsweise $y^{(4)}_n$ in $D^{(3,4)}_s$ durch $y^{(3)}_n$, so zeigt eine leichte Rechnung das Verschwinden dieser beiden Determinanten.

3. Der zweite Fall bezieht sich auf $c_1 = c_2 = 1$. In diesem Sonderfall gilt der

Satz 3: *Ist* $c_1 = c_2 = 1$, *dann bestehen für die Lösungen aus* (27) *die Identitäten* $y^{(1)}_n = y^{(3)}_n$ *und* $y^{(2)}_n = y^{(4)}_n$, *beziehungsweise für die konfluenten hypergeometrischen Funktionen* (28) $y^{(1)}_n = y^{(2)}_n$.

Die hypergeometrischen Funktionen in der ersten und dritten, bzw. in der zweiten und vierten Lösung (27) sind gerade (bis auf einen Faktor z^{1-c}) die beiden Lösungen der entsprechenden hypergeometrischen Differentialgleichung. Setzt man

$$F^{(1,2)}_{n+\varrho_1} = F(a, b; c; z),$$

so folgt

$$F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z) = F^{(3,4)}_{n+\varrho_2}.$$

Dasselbe gilt für die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung; aus

$$\Phi^{(1)}_{n+\varrho_1} = \Phi(a; c; z)$$

folgt

$$\Phi(a - c + 1; 2 - c; z) = \Phi^{(2)}_{n+\varrho_2}.$$

Für $c = 1$ fallen aber die beiden Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung, bzw. der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung zusammen, was daher auch für diese Funktionen in (27) und (28) gilt. Außerdem sind die zu diesen Funktionen gehörenden Faktoren in (27) bzw. (28) paarweise gleich, womit der Satz 3 bewiesen ist.

Dem Verfasser ist die Aufstellung eines allgemeinen einfachen Kriteriums für die lineare Unabhängigkeit der Lösungen (27) bzw. (28) nicht gelungen, sodaß letzten Endes die Berechnung der Determinante (29) Fall für Fall die Entscheidung darüber bringen muß, ob in (27) bzw. (28) bereits ein Fundamentalsystem von Lösungen enthalten ist.

§ 4. Anwendungsbeispiele

1. Allgemeine Zahlenbeispiele. — 2. Differenzengleichung mit in n nicht linearen Koeffizienten. — 3. Laguerresche Matrizen. — 4. Produkte von Besselfunktionen. — 5. Laguerresche Polynome.

1. a) $(n+2)\,y_{n+2}+(3n+9)\,y_{n+1}+(2n+8)\,y_n=0,\quad n=0\ 1, 2, \ldots;$

$F^{(1)}(n+4, 2; 4; 1/2),\qquad F^{(3)}(n+1, -1; -2; 1/2)=(n+5)/4,$

$F^{(2)}(n+4, 2; 4; -1),\qquad F^{(4)}(n+1, -1; -2; -1)=(1-n)/2.$

Allgemeine Lösung:

$$y_n=C_1\,y_n^{(3)}+C_2\,y_n^{(4)}=(-1)^n\,C_1(n+5)/4+(-2)^n\,C_2(1-n)/2,$$
$$n=0, 1, 2, \ldots.$$

b) $(n+4)\,y_{n+2}-(n+4)\,y_{n+1}-2(n+1)\,y_n=0,\quad n=0, 1, 2, \ldots;$

$F^{(1)}(n+1, -1; -1; 3)=3n+4,\qquad F^{(3)}(n+3, 1; 3; 3),$

$F^{(2)}(n+1, 0; -1; 3/2)=1,\qquad F^{(4)}(n+3, 2; 3; 3/2).$

Allgemeine Lösung:

$$y_n=C_1\,y_n^{(1)}+C_2\,y_n^{(2)}=\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\,C_1\,2^n(3n+4)+(-1)^n\,C_2,$$
$$n=0, 1, 2, \ldots.$$

c) $(2n+4)\,y_{n+2}+(3n+6)\,y_{n+1}+(n+1)\,y_n=0,\quad n=0, 1, 2, \ldots;$

$F^{(1)}(n+1, 2; 1; 1/2)=F^{(3)}(n+1, 2; 1; 1/2)=2^{n+1}(n+2),$

$F^{(2)}(n+1, -1; 1; -1)=F^{(4)}(n+1, -1; 1; -1)=n+2.$

Partikuläre Lösung:

$$y_n^{(1)}=y_n^{(2)}=y_n^{(3)}=y_n^{(4)}=(-1)^n\,(n+2),\quad n=0, 1, 2, \ldots.$$

d) $(n+2)\,y_{n+2}-(2n+3)\,y_{n+1}+(n+1)\,y_n=0,\quad n=0, 1, 2, \ldots;$

$\Phi^{(1)}(n+1; 1; 0)=\Phi^{(2)}(n+1; 1; 0)=1.$

Partikuläre Lösung:

$$y_n^{(1)}=y_n^{(2)}=1.$$

Die beiden letzten Fälle sind Anwendungen des Satzes 3.

2. Das Vergleichsverfahren mit den hypergeometrischen Funktionen kann unter Umständen auch auf Differenzengleichungen mit nicht linearen Koeffizienten angewandt werden, und zwar immer dann, wenn sich in der zur Differenzengleichung gehörenden Invariante gewisse Glieder wegheben, sodaß schließlich der Invariantenvergleich mit (12) möglich wird. Als Beispiel behandeln wir folgenden Fall:

$(n+2)(2n+1)\,y_{n+2} - 4(n+1)^2\,y_{n+1} + n(2n+3)y_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$
mit der Invariante

$$I_n = \frac{(2n+3)(2n-1)}{4n(n+1)} - 1.$$

Wir setzen

$$\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 4,\ \gamma_1 = 2,$$
$$\alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 4,\ \gamma_2 = 3$$

und erhalten die zwei konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$\Phi^{(1)}(n + 3/2; 3; 0) = \Phi^{(2)}(n - 1/2; -1; 0) = 1,$$

mit denen wir nach Satz 1 die allgemeine Lösung

$$y_n = C_1\,y_n^{(1)} + C_2\,y_n^{(2)} = C_1\frac{4n^2-1}{3n} + C_2\frac{1}{n},\ \mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots$$

bilden. Ein weiteres Beispiel einer Differenzengleichung mit nicht linearen Koeffizienten werden wir in Punkt 4 behandeln.

3. Die Polynome, die die Elemente der *Laguerreschen Matrix* bilden[12]

$$y_{n,\nu} = \frac{e^{\nu-n}}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{\nu}{k} \binom{\alpha+n+k}{n}, \quad \begin{matrix} n, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ \alpha \text{ reell und } \geqq 0, \end{matrix} \tag{32}$$

genügen der Differenzengleichung

$$(\alpha+n+2)\,y_{n+2} - \left[\frac{1}{e}(\alpha+\nu+n+2) + n+1-\nu\right] y_{n+1} + \frac{n+1}{e}\,y_n = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Mit unserem Vergleichsverfahren erhält man als partikuläre Lösung dieser Differenzengleichung wieder die Darstellung (32). Man findet

$$F^{(1)}(n+1, \nu+1; 1-\alpha; 1-e), \qquad F^{(3)}(n+\alpha+1, \alpha+\nu+1; \alpha+1; 1-e),$$

$$F^{(2)}(n+1, -\nu-\alpha; 1-\alpha; 1-\frac{1}{e}), \qquad F^{(4)}(n+\alpha+1, -\nu; \alpha+1; 1-\frac{1}{e}).$$

Mit der vierten hypergeometrischen Funktion bilden wir

$$y_n^{(4)} = e^{-n}\frac{C}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\alpha+n+k}{n} \binom{\nu}{k} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k, \qquad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

in Übereinstimmung mit (32), wenn wir die Konstante $C = e^{\nu}$ setzen.

4. Sind $y = Z_\nu(x)$ Lösungen der *Besselschen Differentialgleichung*

[12] Siehe [7], S. 80.

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \qquad (\nu \text{ beliebig reell})$$

dann genügt die Funktion[13] $F(x) = Z_\nu(ax)\ Z_\nu(bx)$ der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$x^3 F^{IV} + 4 x^2 F''' + x[2 x^2(a^2 + b^2) - 4\nu^2 - 1] F'' + \\ + [4 x^2(a^2 + b^2) + 4\nu^2 - 1] F' + (a^2 - b^2)^2 x^3 F = 0.$$

(a, b reelle Konstante, $|a| \neq |b|$)

Löst man diese Differentialgleichung mit dem Potenzreihenansatz

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+2\nu}, \tag{33}$$

so erhält man für die Koeffizienten c_n die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$c_{n+2}[4(n+2)(n+2\nu+2)(2n+2\nu+2)(2n+2\nu+4)] + \\ + c_{n+1}[2(a^2+b^2)(2n+2\nu+2)(2n+2\nu+3)] + c_n(a^2-b^2)^2 = 0, \\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{34}$$

mit der Invariante

$$I_n = \frac{4(a^2 - b^2)^2 (n + 1)(n + 2\nu + 1)}{(a^2 + b^2)^2 (2n + 2\nu + 1)(2n + 2\nu + 3)} - 1.$$

Die Gestalt dieser Invariante zeigt die Anwendbarkeit des Vergleichsverfahrens; wir setzen

$$\alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 = 2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \qquad \gamma_1 = 1,$$

$$\alpha_2 = 2\nu + 2, \quad \beta_2 = (2\nu+3)\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad \gamma_2 = 1,$$

und erhalten die vier hypergeometrischen Funktionen

$$F^{(1)}(n+1, -\nu+\tfrac{1}{2}; -2\nu+1; \frac{4ab}{(a+b)^2}), \quad F^{(3)}(n+2\nu+1, \nu+\tfrac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{4ab}{(a+b)^2}),$$

$$F^{(2)}(n+1, -\nu+\tfrac{1}{2}; -2\nu+1; \frac{-4ab}{(a-b)^2}), \quad F^{(4)}(n+2\nu+1, \nu+\tfrac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{-4ab}{(a-b)^2}).$$

Mit der dritten und vierten finden wir nach Satz 1 die partikulären Lösungen

---

[13] Das Produkt ist aus zwei, nicht notwendig identischen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung gebildet, z. B. $F(x) = J_{-\nu}(ax)\ Y_\nu(bx)$.

$$c_n^{(3,4)} = \left(\frac{a \mp b}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^n C}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} F(n+2\nu+1, \nu+\tfrac{1}{2}; 2\nu+1; \pm\frac{4ab}{(a\pm b)^2})$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (35)$$

Ist das Produkt der Konstanten $a \,.\, b > 0$, dann ist $0 < 4ab(a+b)^{-2} < 1$ und wir werden daher $c_n^{(3)}$ (obere Vorzeichen) heranziehen; ist hingegen $a.b < 0$, dann gilt $0 < -4ab(a-b)^{-2} < 1$ und wir verwenden $c_n^{(4)}$ (untere Vorzeichen). Setzen wir noch ohne wesentliche Einschränkung $|a| < |b|$ voraus, dann können wir einfach die ersten beiden Koeffizienten $c_0^{(3,4)}$ und $c_1^{(3,4)}$ berechnen

$$c_0^{(3,4)} = \frac{C}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b \pm a}{b \mp a}\right)^{2\nu+1}, \quad c_1^{(3,4)} = \frac{-C(a^2+b^2)}{4\,\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{b \pm a}{b \mp a}\right)^{2\nu+1}. \qquad (35')$$

Betrachten wir nun etwa, um irgendeinen Fall herauszugreifen, das Produkt zweier Besselfunktionen erster Art mit gleichem Index

$$J_\nu(ax)\,J_\nu(bx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{ax}{2}\right)^{2n+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2n+\nu},$$

dann lauten die ersten beiden Koeffizienten für den Potenzreihenansatz (33)

$$c_0 = \frac{(ab)^\nu}{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}, \quad c_1 = \frac{(ab)^\nu\,(a^2+b^2)}{2^{2\nu+2}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+2)}.$$

Damit diese ersten Koeffizienten mit (35′) übereinstimmen, genügt es die freie Konstante

$$C = \frac{(ab)^\nu}{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b \mp a}{b \pm a}\right)^{2\nu+1}$$

zu setzen; wir erhalten daher aus (33) und (35) nach Einsetzen der Konstante C die Produktdarstellung von zwei Besselfunktionen erster Art

$$F(x) = \frac{2(ab)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,(b \pm a)^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b \mp a}{2}\right)^{2n+2\nu+1} \frac{(-1)^n\, x^{2n+2\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}.$$

$$F(n+2\nu+1, \nu+\tfrac{1}{2}; 2\nu+1; \pm\frac{4ab}{(a\pm b)^2}), \qquad (36)$$

wenn die oben genannten Bedingungen erfüllt sind; d. h. die oberen Vorzeichen gelten im Fall $a \,.\, b > 0$ und die unteren im Fall $a \,.\, b < 0$; außerdem genügen a und b der Bedingung $|a| < |b|$.

Durch Anwendung der ersten Formel von *Gauß* und *Kummer*[14]

$$F(a, b; 2b; \frac{4z}{(1+z)^2}) = (1+z)^{2a} F(a, a-b+\tfrac{1}{2}; b+\tfrac{1}{2}; z^2)$$

auf die Darstellung (36) entsteht

$$F(x) = \frac{2a^\nu}{\Gamma(\nu+1)b^{\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^{2n+2\nu+1} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \cdot$$

$$F(n+2\nu+1, n+\nu+1; \nu+1; \frac{a^2}{b^2}), \qquad (37)$$

indem wir im Fall $a \,.\, b > 0$ das $z = a/b$ und im Fall $a \,.\, b < 0$ das $z = -a/b$ setzen. Diese *endgültige Darstellung* des Produktes zweier Besselfunktionen erster Art mit gleichem Index gilt für alle a und b ohne Rücksicht auf deren Vorzeichen unter der *Voraussetzung* $|a| < |b|$.

Das in der dritten Fußnote zitierte Resultat aus der Dissertation der *M. Wurnig* hat mit hypergeometrischen Funktionen ausgedrückt die Form

$$F(x) = \frac{a^\nu}{\Gamma(\nu+1)b^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b^2-a^2}{4}\right)^{n+\nu} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \cdot$$

$$F(-n-\nu, n+\nu+1; \nu+1; \frac{a^2}{a^2-b^2}),$$

das für $|b| > |a|\sqrt{2}$ Gültigkeit hat. Wendet man darauf die (31) in anderer Art darstellende Transformation[15]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F(c-a, b; c; \frac{z}{z-1})$$

an, so erhält man gerade (37).

Ganz analoge Formeln lassen sich ableiten, wenn man andere Produktbildungen (z. B. nicht gleichartiger Besselfunktionen) vornimmt.

5. Zuletzt wollen wir mit Hilfe des Vergleichsverfahrens den bekannten Zusammenhang der Laguerreschen Polynome mit den konfluenten hypergeometrischen Funktionen ableiten.

Für die Laguerreschen Polynome gilt die Differenzengleichung[16]

---

[14] Diese Formel für quadratische Transformation der hypergeometrischen Funktion findet sich in [5], S. 13 oder [6], S. 64.

[15] Damit diese Transformation angewandt werden kann, muß ν nicht negativ ganz vorausgesetzt werden.

[16] Siehe etwa [4], S. 214 oder [8], S. 276.

$$(n+2)\,L_{n+2}^{(\alpha)}(x) - (2n+3+\alpha-x)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+1+\alpha)\,L_n^{(\alpha)}(x) = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \alpha \text{ reell und } \geqq 0.$$

Man findet

$$\Phi^{(1)}(n+\alpha+1; \alpha+1; -x),\ \Phi^{(2)}(n+1; 1-\alpha; -x)$$

und bildet mit der ersten konfluenten hypergeometrischen Funktion

$$y_n^{(1)} = C \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+n+k}{n} \frac{(-x)^k}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{38}$$

Die ersten beiden Laguerreschen Polynome sind

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1,\ L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 1 - x,$$

sodaß (38) noch mit e^x multipliziert werden muß, damit diese Anfangswerte übereinstimmen. Dadurch ist die freie Konstante C bestimmt und es entsteht für die Laguerreschen Polynome die Darstellung

$$(L_n^{(\alpha)}(x)) = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+n+k}{n} \frac{(-x)^k}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Indem wir diese mit Hilfe der Beziehung[17]

$$\Phi(a; c; z) = e^z\,\Phi(c-a; c; -z)$$

umformen, so erhalten wir schließlich

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{\alpha+n}{n}\,\Phi(-n; \alpha+1; x),$$

die bekannte Beziehung zwischen den Laguerreschen Polynomen und den konfluenten hypergeometrischen Funktionen[18].

Literatur

[1] *N. E. Nörlund*: Differenzenrechnung, Springer-Verlag, Berlin, 1924.

[2] *L. M. Milne-Thomson*: The Calculus of finite Differences, Macmillan and Co., 1951.

[3] *H. G. Ap Simon*: A Property of Bessel Functions, Quart. J. Math. Oxford (2), 4 (1953), p. 282—283.

[4] *F. G. Tricomi*: Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

---

[17] Gewöhnlich als *Kummersche* Formel bezeichnet, siehe [4], S. 159 oder [5], S. 112 oder [6], S. 253.

[18] Siehe etwa [4], S. 214 oder [6], S. 268.

[5] *W. Magnus u. F. Oberhettinger*: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1948.

[6] *Erdelyi Magnus Oberhettinger Tricomi*: Higher Transzendental Functions, Mc.Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1953, Vol. I.

[7] *P. Lesky*: Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen, Monatshefte f. Mathematik, **63** (1958), p. 59—83.

[8] *G. Vitali e G. Sansone*: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bologna, Nicola Zanichelli editore, 1946, parte II.

Buchbesprechungen

Opere. Band IV: Serie di Fourier. Band V: Sviluppi in serie. Von *U. Dini*. (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) IX, 272 + 296 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1959. Jeder Band L. 3000.—.

Der IV. Band der Sammlung der Werke *Dini*'s ist ein Neudruck seines 1880 erschienenen klassischen Buches über „Fourier'sche Reihen und andere analytische Darstellungen der Funktionen einer reellen Variabeln". Dieser Band wurde in das Programm der Herausgeber nachträglich aufgenommen, weil er die Grundlagen für den nächsten Band bringt und die ursprüngliche Ausgabe längst vergriffen ist. — Der die ganze Sammlung abschließende Band V ist ein Abdruck einer 1911 erschienenen lithographierten Ausgabe von Teilen aus verschiedenen Vorlesungen *Dini*'s, die er unter dem Titel „Reihenentwicklungen zur analytischen Darstellung der Funktionen einer reellen Veränderlichen" zusammengefaßt hat. Dabei handelt es sich der Hauptsache nach um die Integration und die Differentiation durch Reihen, sowie um die Multiplikation dieser Reihen.

K. Mayrhofer, Wien

Einführung in die mathematische Logik. Teil I: Aussagenkalkül. Von *G. Asser*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 18.) Mit 7 Textabb., VI, 184 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 11.25.

Das Buch — der erste Teil einer geplanten dreibändigen Einführung in das Gesamtgebiet der mathematischen Logik — stellt den Aussagenkalkül der klassischen zweiwertigen Logik in ziemlich ausführlicher Form dar. Begonnen wird mit den Begriffen Wahrheitswert und Wahrheitsfunktion einerseits und der induktiven Definition des Begriffes Ausdruck andererseits. Diese beiden Begriffe werden dann in Zusammenhang gebracht durch die (induktive) Definition des Wertes, den ein Ausdruck bei Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten annimmt; daran anschließend werden die wichtigsten allgemeingültigen Ausdrücke angeführt und besprochen und die verschiedenen Arten von aussagenlogischen Normalformen, insbesondere die kanonischen Normalformen, abgeleitet; bei dieser Gelegenheit wird auch die Anwendung der Aussagenlogik in der Theorie der elektrischen Schaltungen erläutert. Nach Einführung des Begriffes der Ableitbarkeit wird ein aussagenlogisches Axiomensystem angegeben; es stimmt im wesentlichen mit dem von *Hilbert* und *Bernays* in den „Grundlagen der Mathematik" verwendeten überein. Für die Vollständigkeit des Systemes werden zunächst zwei Beweise (nach *Post* und *Wajsberg*) gebracht. Der nächste Paragraph beschäftigt sich mit Axiomatisierbarkeit, den verschiedenen Arten der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit und den zwischen ihnen bestehenden Beziehungen; hier findet man auch zwei weitere Beweise für die Vollständigkeit des angegebenen Axiomensystems (nach *Thiele* und *Kalmár*). Es folgen Untersuchungen über die Unabhängigkeit von Axiomensystemen, bei denen logische Matrizen eingeführt und verwendet werden; insbesondere wird die Unabhängigkeit des aussagenlogischen Axiomensystemes nachgewiesen. Nach Einführung

des *Gentzen*-Kalküles und der Charakterisierung der Ableitbarkeit in diesem Kalkül nach *Bolzano-Tarski* folgen einige Bemerkungen zum allgemeinen Kalkülbegriff, mit denen der Band schließt.

Die Reichhaltigkeit des Buches geht wohl schon aus dieser Inhaltsangabe hervor. Von der Gelegenheit, allgemeine metatheoretische Begriffe am Spezialfall der klassischen Logik zu erläutern, wird reichlich Gebrauch gemacht. Die Terminologie und Bezeichnungsweise weicht zwar manchmal etwas vom Üblichen ab, ist aber durchaus zweckmäßig. Nur der Schriftsatz ist oft zu gedrängt und daher etwas unübersichtlich.

Nach diesem verheißungsvollen Anfang kann man dem Erscheinen der beiden anderen Bände mit Interesse entgegensehen. *W. Nöbauer*, Wien

Mengenlehre und Logik. Von *A. A. Fraenkel.* (Erfahrung und Denken: Band 2.) Mit 4 Textabb., 110 S. Berlin: Duncker & Humblot. 1959. Brosch. DM 18.60.

Die Schriftenreihe „Erfahrung und Denken", der das vorliegende Buch angehört, stellt sich die Aufgabe, eine kritische Untersuchung der Einzelwissenschaften nach philosophischen Gesichtspunkten vorzunehmen. Dieser Zielsetzung entsprechend werden in dem Buch zugleich mit einer sehr ausführlichen und leicht verständlichen Darlegung der mengentheoretischen Grundtatsachen die aus der Mengenlehre resultierenden logischen Probleme und deren Lösungen bzw. Lösungsversuche behandelt, wobei vor allem auf die Diskussionen über das Auswahlprinzip und die Antinomien eingegangen wird. So vermittelt das ansprechende, wohl auch für den Nichtmathematiker gut lesbare Bändchen einerseits die Fundamente eines der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik, andererseits aber einen lehrreichen Einblick in die Methoden und Resultate der mathematischen Grundlagenforschung. *W. Nöbauer*, Wien

Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Von *J. Surányi.* 216 S. Budapest: Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. 1959.

Das Entscheidungsproblem beschäftigt sich bekanntlich mit der Aufgabe, ein Verfahren zur Feststellung der Erfüllbarkeit bzw. Allgemeingültigkeit von Ausdrücken anzugeben. Während dieses Problem z. B. im Klassenkalkül restlos gelöst werden konnte, sind im Prädikatenkalkül die Forschungen darüber noch keineswegs abgeschlossen. Insbesondere liegen hier Ergebnisse in folgenden zwei Richtungen vor: Einerseits wurden Entscheidungsverfahren für gewisse spezielle Klassen von Ausdrücken gefunden, andererseits konnte das Entscheidungsproblem für beliebige Ausdrücke auf das Entscheidungsproblem für Ausdrücke von bestimmter Form, sogenannte Reduktionstypen, zurückgeführt werden. Während die Resultate von der ersten Art in einer Monographie von *W. Ackermann* (Solvable cases of the decision problem; Amsterdam, 1954) dargestellt wurden, werden hier die des zweiten Typs erstmalig zusammenfassend behandelt. Das Buch stellt deshalb eine wertvolle Bereicherung der Literatur über mathematische Logik dar.

Nach den ersten vorbereitenden Kapiteln, in denen der Prädikatenkalkül der ersten Stufe beschrieben und die Zielsetzung des Buches dargelegt wird, wird das Entscheidungsproblem zunächst auf die *Skolem*schen Normalformen reduziert und dann gezeigt, daß man sich sogar auf gewisse spezielle *Skolem*sche Normalformen beschränken kann. In den folgenden Kapiteln werden weitere

Reduktionstypen angegeben, unter anderem solche mit einer einzigen zweistelligen Prädikatenvariablen. Das letzte Kapitel bringt zuerst einen Satz von *Kalmár*, mit dessen Hilfe das allgemeine Entscheidungsproblem auf den Fall eines endlichen Individuenbereiches zurückgeführt werden kann, sodann wird ein von *Kalmár* stammender Beweis des berühmten *Church*schen Satzes über die rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblemes skizziert. Ein Nachwort weist auf ungelöste Probleme hin. *W. Nöbauer*, Wien

Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von *Gödel, Church, Kleene, Rosser* und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung. Von *W. Stegmüller*. III, 114 S. Wien: Springer-Verlag. 1959. Steif geheftet ö. S 118.80, DM 19.80.

Die Methoden und Ergebnisse der modernen logischen und mathematischen Grundlagenforschung sind nicht nur für die engeren Fachleute sondern auch für jede erkenntnistheoretische Untersuchung von Bedeutung. Eine zentrale Stellung nehmen dabei die Theoreme von *K. Gödel* und *A. Church* und ihre Verallgemeinerungen ein, die jedoch bisher teils in fremdsprachlicher Literatur teils in Facharbeiten von großem Schwierigkeitsgrad behandelt sind. In dem Versuch, diese grundlegenden Kenntnisse einem breiten Publikum vorzuführen, liegt die Bedeutung des vorliegenden Buches. Ausgehend von der klassischen Antinomie von *Richards* wird in einem vorbereitenden Abschnitt die Problemstellung und Lösungsmöglichkeit des Gödelschen Unvollständigkeitstheorems dem Leser plausibel gemacht, wobei bereits die von *Gödel* stammende Methode der Arithmetisierung der Metamathematik eingeführt wird. Gerade in diesem einleitenden Kapitel zeigt sich die Fähigkeit des Autors zu prägnanter und verständlicher Darstellung. Die drei Hauptabschnitte des Buches behandeln die Gödelschen Theoreme, die Theoreme von *Church* und die Verallgemeinerungen von *Kleene*. Die Beweisgänge zum Gödelschen Theorem sind dabei ohne Bezugnahme auf den Wahrheitsbegriff rein syntaktisch durchgeführt und benötigen nur elementare logistische Vorkenntnisse. Die Beweise sind bis auf unwesentliche Details vollständig dargestellt. Das Theorem von *Church* bezieht sich auf die Unentscheidbarkeit der Quantifikationstheorie, also auf die Tatsache, daß es logisch unmöglich ist, für eine vorgelegte Aussage zu entscheiden, ob diese Aussage rein logisch gültig ist oder nicht. Zu seinem Beweis ist neben einem axiomatischen Aufbau der Quantifikationstheorie noch eine präzise (natürlich formale) Definition des Begriffes der Berechenbarkeit nötig. Gerade das Theorem von *Church* besitzt weitgehende Konsequenzen, da es die Ansicht von der „Trivialität" der Logik widerlegt, in dem Sinne, daß es keine Maschine geben kann, die die Lösung von innerhalb der Theorie formulierbaren Problemen bewerkstelligt. Die Theoreme von *Gödel* und *Church* beziehen sich auf bestimmte logische bzw. logischmathematische Systeme. Es ist daher naheliegend, nach analogen Resultaten zu suchen, die von konkreten Kalkülen möglichst unabhängig sind; diese Verallgemeinerungen wurden von *Kleene* durchgeführt. In diesem Zusammenhang wird auch die Unentscheidbarkeit der elementaren Zahlentheorie behandelt.

Von besonderem Reiz an diesem interessanten und ansprechenden Buche ist es, daß der Autor sich nicht scheut, bei Gelegenheit die allgemein erkenntnistheoretische Bedeutung der behandelten Probleme zu diskutieren, wobei naturgemäß seine persönliche Einstellung zu diesen Fragen deutlich wird.

H. Brauner, Wien

Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und für Freunde der Mathematik. Von *H. Tietze.* Zweite Auflage. I. Band: Mit 115 Textabb., 10 Tafeln, XX, 256 S. II. Band: Mit 41 Textabb., 8 Tafeln, VIII, 297 S. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. 1959. Zusammen geh. DM 28.—; geb. Gln. DM 36.—.

Da sich die zweite Auflage nur durch wenige Verbesserungen und Ergänzungen von der ersten Auflage unterscheidet, so genügt es, auf die ausführliche Besprechung in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **53**, 336 (1949) hinzuweisen.

N. Hofreiter, Wien

Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 3. und 4. Klasse der Mittelschulen. Von *E. Ludwig, J. Laub, W. Körperth* und *U. Schöndorfer.* Mit 301 Textabb., VIII, 456 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1959. Geb. S 64.—.

Der Lehrstoff der dritten und vierten Klasse der österreichischen Mittelschulen umfaßt in Arithmetik die Einführung der negativen Zahlen, das Rechnen mit Polynomen und rationalen Funktionen in einer oder mehreren Unbestimmten, lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme in einer oder zwei Unbekannten, außerdem am Beispiel der Quadrate und Kuben bzw. der Quadrat- und Kubikwurzeln eine Einführung in die Benützung von Tafeln. Mit großer Sorgfalt werden diese Dinge hier in einer dem Auffassungsvermögen der Zwölf- bis Vierzehnjährigen angepaßten Form dargestellt. Die methodischen Schwierigkeiten bei dem Lehrstoff der Geometrie (Flächenberechnung bei Vieleck und Kreis, der Satz von Pythagoras, Oberfläche und Volumen der wichtigsten Körper, Konstruktion der Kegelschnitte, Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen, Schrägriß- und Normalrißdarstellungen von Figuren und Körpern) sind geringer; gute Figuren tragen viel zum Verständnis der Sätze bei. Um und Auf des Unterrichtes an der Unterstufe ist selbstverständlich das Üben, deshalb enthält das Buch auch mehr als 5000 Übungsaufgaben. Bei ihrer Auswahl wurde von der Gelegenheit, Querverbindungen zu anderen Fächern herzustellen oder das Allgemeinwissen des Schülers zu fördern, oft Gebrauch gemacht. Als praktisch wird sich die Kotierung der Angaben bei den Konstruktionsaufgaben erweisen.

Mit dem Erscheinen des vorliegenden Bandes ist nun die Lehrbuchreihe von *E. Ludwig* abgeschlossen. Es liegt damit ein Unterrichtswerk vor, das in der Darbietung des Lehrstoffes und der Auswahl der Übungsaufgaben den Erfordernissen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichtes im Rahmen des österreichischen Lehrplanes voll entspricht und auch wohl noch lange Zeit entsprechen wird.

W. Nöbauer, Wien

Mathematics in Secondary Modern Schools. A. report prepared for the Mathematical Association for consideration by all concerned in the teaching of Mathematics in Secondary Schools. By Members of the Modern School Sub-Committee. Mit 78 Textabb., VI, 221 S. London: G. Bell & Sons. 1959.

Im Jahre 1946 wurde in England ein Komitee von Mathematiklehrern gebildet, das die Aufgabe hat, Berichte über wichtige Teilgebiete der Elementarmathematik zu verfassen. Ein solcher Bericht befaßt sich mit der Schule, mit dem Schüler, mit der Stellung und mit den Zielen der Mathematik in einer modernen Schule, mit der methodischen Gestaltung des Mathematikunterrichts

und mit der Notwendigkeit von wichtigen Änderungen. Der vorliegende Bericht umfaßt den Mathematikunterricht — verglichen mit dem Lehrplan an österreichischen Mittelschulen — von der ersten bis etwa zur sechsten Klasse. Eingehend werden z. B. die Schwierigkeiten geschildert, die dem in die erste Klasse eintretenden Schüler begegnen, und es werden Vorschläge und Hinweise gegeben, wie diese Schwierigkeiten auf ein Minimum vermindert werden können. Es wird darauf hingewiesen, daß die Mathematik in erster Linie auf die Anwendung in der Praxis ausgerichtet sein soll. Zeitgemäße Beispiele und Anwendungen bestimmen die Lehrmethode. Beispiele, die das moderne Leben betreffen, sind anderen Beispielen vorzuziehen, auch wenn diese historischen Wert besitzen. Das Lernen von Regeln und Sätzen genüge nicht, um in neue Zusammenhänge eindringen zu können, vielmehr müssen Erfahrung und Experiment die ständigen Begleiter des Schülers sein. Nach den Erfahrungen des Lehrerkomitees sind nur begabte ältere Schüler befähigt und reif, die Mathematik als abstraktes System zu erfassen. Eingehend werden die einzelnen Stoffgebiete der Elementarmathematik behandelt. Stets wird auf verschiedene didaktische Schwierigkeiten aufmerksam gemacht. Vorschläge zur Überwindung dieser Schwierigkeiten geben Hinweise für eine erfolgreiche Lehrmethode. Es kann nur gewünscht werden, daß recht viele Lehrer der Mittelschulmathematik diesen Bericht eingehend lesen mögen. *J. Laub*, Wien

College Arithmetic. Von *W. I. Layton*. Mit 20 Textabb., IX, 200 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 3.50.

Das Buch ist für solche Studenten in einem College gedacht, deren Wissen in der elementaren Arithmetik allzu dürftig ist. Ihnen wird Gelegenheit gegeben, ihre Kenntnisse zu erweitern und eine Fertigkeit im Rechnen zu erlangen. Dementsprechend ist die Darstellung. Eine sehr große Anzahl von elementaren Aufgaben dient zum Üben. Zu jeder zweiten Aufgabe wird die Lösung angegeben. Das Buch bringt neben der elementaren Arithmetik, das ist das Rechnen mit Zahlen, auch etwas elementare Algebra und einige Anwendungen auf Geometrie. Auch Volkshochschulen ist das Buch zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Teoria Liczb. Band II. Von *W. Sierpiński*. (Monografie Matematyczne: Band 38.) 487 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1959. zl. 80.

Die Vielfältigkeit der Probleme der Zahlentheorie, wie sie etwa in dem Werk von *Hardy* und *Wright* lebendig zum Ausdruck kommt, wird uns in diesem neuen Buch wieder deutlich vor Augen geführt. Mit ungeheurer Mühe hat der Verfasser hier die interessantesten Ergebnisse der elementaren Zahlentheorie gesammelt und führt sie dem Leser vor. Es sind sozusagen Probleme am laufenden Band, und daher ist es nicht möglich, den Inhalt des Buches in kurzen Zügen darzustellen. Sehr großes Gewicht ist z. B. auf die Behandlung diophantischer Gleichungen gelegt worden, soweit ihre Behandlung ohne die Theorie der algebraischen Zahlkörper möglich ist, von denen wir einige Beispiele nennen: $x^2 + x + 1 = 3y^2$, $x^3 + y^3 = 2z^3$, $x^2 + k = y^3$, $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$, $x^z - y^t = 1$. Weitere Gegenstände, die ausführlich behandelt werden, sind unter anderem: Mit den Sätzen von *Fermat* und *Wilson* zusammenhängende Fragen, *Dedekind*sche Summen, Kettenbrüche, Primzahlen, additive Zahlentheorie. Zwar werden immer nur die mit verhältnismäßig elementaren Mitteln beweisbaren Ergebnisse gebracht, jedoch zeigt sich gerade dabei die Meisterschaft des Verfassers. Überall sind auch die neuesten Forschungen berücksichtigt worden, und bei der Lösung

von Hunderten von Aufgaben kann sich der Leser selbst betätigen. Schwierigere Dinge werden oft nur referiert, doch ist auch hier eine Fülle von Ergebnissen verwertet worden. Für dieses anregende und reichhaltige Werk sind alle Mathematiker und Liebhaber der Mathematik dem Verfasser zu größtem Dank verpflichtet. *K. Prachar*, Wien

The Theory of Numbers and **Diophantine Analysis.** Von *R. D. Carmichael.* (Dover Books on Mathematics.) 94 + VI, 118 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 1.35.

Die beiden Bücher "The theory of numbers" und "Diophantine analysis" des Verfassers wurden hier in einem Band vereinigt. Es sind unveränderte Abdrucke der letzten (1914 bzw. 1915) erschienenen Auflagen. Das erste Buch gibt eine Einführung in die Zahlentheorie (Teilbarkeit, lineare Kongruenzen, Sätze von *Fermat* und *Wilson*, Primitivwurzeln u. a.) und dient auch heute als sehr gut lesbare Einführung. Das zweite Buch ist den nichtlinearen diophantischen Gleichungen gewidmet und war 1915 eine systematische Darstellung der damals bekannten grundlegenden Ergebnisse. Auch heute kann es als eine gut lesbare Einführung dienen, doch muß sich der Leser bewußt sein, daß das Buch den in den letzten 45 Jahren gefundenen zahlreichen und wichtigen Erkenntnissen nicht gerecht werden kann. Viel wünschenswerter wäre ein modernes Lehrbuch über diophantische Gleichungen als der unveränderte Abdruck eines 1915 erschienenen Buches. *N. Hofreiter*, Wien

Additive Primzahltheorie. Von *L.-K. Hua.* Deutsche Übersetzung. VI, 174 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 20.50.

Dies ist eine neue, erweiterte Ausgabe des 1947 in russischer und 1953 in chinesischer Sprache erschienenen Buches des bekannten Zahlentheoretikers (wissenschaftlicher Redakteur: *H. Salié*). Der Verfasser gibt darin eine mit vollständigen Beweisen versehene Darstellung der Methode der trigonometrischen Summen in ihrer Anwendung auf Probleme der additiven Primzahltheorie, insbesondere das *Waring-Goldbach*'sche Problem. Das vorliegende Werk ist bisher das einzige Buch, in dem dieses Problem behandelt wird. Inhalt: I. Trigonometrische Summen. II. Abschätzung von Summen, die die Teilerfunktion enthalten. III. Sätze über den Mittelwert einiger trigonometrischer Summen. IV. Der *Vinogradov*sche Mittelwertsatz und seine Folgerungen. V. Sätze über den Mittelwert einiger trigonometrischer Summen (II). VI. Trigonometrische Summen, die Primzahlen enthalten. VII. Asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen des *Waring-Goldbach*'schen Problems. VIII. Singuläre Reihen. IX. Weitere Untersuchung des *Waring-Goldbach*'schen Problems. X. Systeme diophantischer Gleichungen mit Primzahlen als Unbekannten. XI. Weitere Untersuchungen zum Problem des zehnten Kapitels. XII. Einzelergebnisse. Besonders möge auf die zahlreichen speziellen Ergebnisse für niedrige Exponenten (Quadrate, Kuben, Biquadrate, usw.) hingewiesen werden, die man bisher nur sehr verstreut in Originalarbeiten finden konnte. Der Verfasser, der selbst wesentlichen Anteil an der Entwicklung des ganzen Gebietes hat und von dem zahlreiche Ergebnisse auch hier zum ersten Mal publiziert wurden, hat mit diesem schönen Buch allen, die für analytische Zahlentheorie Interesse haben, einen großen Dienst erwiesen. *K. Prachar*, Wien

Galoissche Theorie. Von *E. Artin.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 28.) 86 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 5.30.

Vom Verfasser stammt bekanntlich das Buch: Galois Theory (Notre Dame Mathematical Lectures), das 1948 in zweiter Auflage erschienen ist. Die nun vorliegende deutsche Ausgabe ist keine reine Übersetzung, sondern stark überarbeitet. Wie früher gelingt es dem Autor, die Studierenden rasch mit den Problemen und Methoden der Galoisschen Theorie vertraut zu machen. An Vorkenntnissen werden nur geringe Kenntnisse aus der Algebra verlangt. An die Reife des Lesers werden aber höhere Anforderungen gestellt. Kapitel I gibt eine kurz gefaßte Einführung in die lineare Algebra. Kapitel II behandelt die Körpertheorie (Erweiterungskörper, Zerfällungskörper, normale Erweiterungen, Hauptsatz der Galoisschen Theorie, Einheitswurzeln). Das dritte Kapitel bringt Anwendungen (Auflösung von Gleichungen durch Radikale, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal). Es stammt von *N. A. Milgram* und wurde vollständig neu geschrieben.

N. Hofreiter, Wien

Ingenieur-Mathematik. 1. Band: Differential- und Integralrechnung. Von *R. Sauer.* Mit 178 Textabb., VIII, 304 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 24.—.

Bei der starken Überfüllung speziell der Technischen Hochschulen ist die Nachfrage nach einem Lehrbuch der Mathematik, das auf die Bedürfnisse dieser Hochschulen abgestimmt ist, besonders rege geworden. Wenn man weiß, wie sehr die angehenden (und die fertigen) Ingenieure Wert auf einen „Königsweg" in der Mathematik legen, der Schnelligkeit und Einfachheit der Rechnung vielfach auch auf Kosten der Klarheit und Präzision bevorzugt, so weiß man um die Schwierigkeit eines Lehrbuches der Mathematik für Ingenieure. In dem vorliegenden ersten Band dieser Darstellung wird der Stoff der Mathematikvorlesung des ersten Jahres gebracht, wobei der Verfasser sich vielfach auf die einfacheren Spezialfälle beschränkt (z. B. bei den Determinanten und linearen Gleichungssystemen) und schwierigere Begriffe und Beweise in den Anhang verweist (Differentiationsregeln, gleichmäßig konvergente Funktionenreihen). Damit sind die exakten Grundlagen der Mathematik gegeben, auf denen das weitere Studium des Ingenieurs aufbauen kann. Von Übungsbeispielen wurde Abstand genommen. Man wird das Buch, das eine gute Zwischenstellung zwischen einem bloßen Nachschlagewerk und einem rein theoretischen Lehrbuch einnimmt, gerne dem angesprochenen Leserkreis empfehlen und dem Verfasser für die schwierige Arbeit einer solchen Darstellung ausdrücklich danken.

H. Hornich, Wien

Absolute Analysis. Von *F. und R. Nevanlinna.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 102.) Mit 4 Textabb., VIII, 259 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Brosch. DM 36.—; Ganzl. DM 39.—.

Unter absoluter Analysis versteht man eine solche, die weitgehend von den Koordinatendarstellungen und von der Dimension der Vektorräume unabhängig ist. Hier wird eine systematische Grundlage für eine absolute Analysis gegeben. Der Vorteil besteht in einer größeren Einheitlichkeit und Allgemeingültigkeit. Manche Beweise werden durchsichtiger und einfacher. Das Buch enthält 5 Kapitel. Das erste (Lineare Algebra) dient als Grundlage für die folgenden und enthält

lineare Räume, lineare Abbildungen, multilineare Funktionen und Metrisierung. Den zentralen Teil nehmen Kapitel 2 und 3 (Differential- und Integralrechnung) ein. Sie bringen die Differentiation allgemeiner Vektorfunktionen, die Theorie der impliziten Funktionen und die Integration der multilinearen alternierenden Differentialformen. Es ergeben sich enge Zusammenhänge mit dem Begriff des äußeren Differentials von *Graßmann-Cartan*. Kapitel 4 bringt Differentialgleichungen von der Gestalt $y' = f(x, y)$, wo x ein Vektor und y eine Vektorfunktion ist. Es werden größtenteils Existenzbeweise geführt. Im Kapitel 5 (Differentialgeometrie) werden die Eigenschaften der Kurven und Flächen relativ zu einem euklidischen n-dimensionalen Einbettungsraum untersucht. Als besonders vorteilhaft erweist sich die koordinatenfreie Definition eines Tensors. — Mathematiker mit guter Grundausbildung werden das Buch mit großem Interesse lesen. *N. Hofreiter*, Wien

Analytic Function Theory. Band I. Von *E. Hille*. (Introductions to Higher Mathematics.) Mit 26 Textabb., XI, 308 S. Boston-New York-Chicago-Atlanta-Dallas-Palo Alto-Toronto-London: Ginn and Company. 1959. Geb. $ 6.50.

Da es ausgezeichnete Lehrbücher der Funktionentheorie gibt, so kann man wirklich nicht sagen, daß ein Bedarf nach einem neuen Lehrbuch besteht. Jedenfalls aber wird sich das vorliegende Buch behaupten und zu den besten Lehrbüchern der Funktionentheorie gehören. Der Anlage nach scheint es sich durch reichen Inhalt auszuzeichnen, doch wird man Genaueres erst nach Erscheinen des zweiten Bandes sagen können. Der erste Band verläuft inhaltlich im üblichen Rahmen, und zwar: holomorphe Funktionen, Potenzreihen, komplexe Integration, Singularitäten, ganze und meromorphe Funktionen, Residuentheorie. Die Darstellung ist der Auffassungskraft der Studierenden in den höheren Semestern angemessen und zeichnet sich durch Klarheit und Ausführlichkeit aus. Erwähnt seien die zahlreichen Aufgaben und die vielen historischen Anmerkungen. Hervorzuheben ist der Zusammenhang mit anderen Gebieten der Mathematik, insbesondere mit abstrakter Algebra. *N. Hofreiter*, Wien

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von *J. Horn*. Sechste vollständig umgearbeitete Auflage von *H. Wittich*. (Göschens Lehrbücherei: I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik: Band 10.) Mit 10 Textabb., 275 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Geb. DM 32.—.

Nach dem Tode von *J. Horn* hat *H. Wittich* die Neuauflage besorgt. Er hat das Buch sorgfältig und gründlich umgearbeitet, wobei aber die Anlage und der Aufbau im wesentlichen beibehalten wurden. Die erste Auflage des Buches, die bereits 50 Jahre zurückliegt, wurde seinerzeit in dieser Zeitschrift: Monatsh. Math. 18, 7 (1907) ausführlich besprochen und gewürdigt. Die zweite und fünfte Auflage brachten manche Änderungen und Zusätze. Von dem neuen Autor aber wurden viele Paragraphen ganz neu geschrieben. Sehr stark abgeändert wurden die beiden Kapitel über Differentialgleichungen im Komplexen. Sie passen sich nunmehr den modernen Vorlesungen über Funktionentheorie gut an. Erweitert wurde auch die Theorie der speziellen, für die Mathematische Physik besonders wichtigen Funktionen. Manches ist ganz neu, z. B. Mathieusche Funktionen. Auch sonst wurden manche wertvolle Zusätze gemacht, z. B. das für die praktische Mathematik wichtige Verfahren von *Adams-Störmer* zur numerischen Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Neu

eingeführt wurden: Operatoren, ferner Vektoren und Matrizen. Dadurch wird die Darstellung bei Systemen von Differentialgleichungen wesentlich übersichtlicher. Durch die gründliche Umarbeitung ist es dem neuen Autor gelungen, daß dem Buch nichts Antiquiertes anhaftet. Wie früher ist das Buch ob seiner breiten Darstellung und seiner glücklichen Stoffauswahl ein sehr gutes einführendes Lehrbuch, das die Studierenden der Mathematik, der Physik und der Ingenieurwissenschaft gut brauchen können. *N. Hofreiter*, Wien

An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics. Von *W. E. Byerly*. (Dover Books on Mathematics.) IX, 287 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 1.75.

Die Dover Publications machen es sich zur Aufgabe, unveränderte Neudrucke von oft länger zurückliegenden Auflagen bekannter Bücher herzustellen. Wenn auch umgearbeitete Neuauflagen manchmal wünschenswert wären, so ist der unveränderte Abdruck deshalb berechtigt, weil die Bücher außerordentlich billig sind. Das vorliegende Buch ist der unveränderte Abdruck der im Jahre 1873 erschienenen Auflage. Interessenten sind in erster Linie Studierende der Mathematischen Physik, die bereits die Differential- und Integralrechnung gut kennen. Das Wort „elementar" im Titel soll besagen, daß auf die mathematische Theorie der Fourierschen Reihen (Darstellbarkeit, Konvergenz) wenig eingegangen wird. Der Nachdruck liegt auf den Methoden und den Anwendungen auf die Physik. Eine sehr große Anzahl von Aufgaben aus der Mathematischen Physik wird gestellt und vielfach auch durchgerechnet. Neben der Theorie der Fourierschen Reihen wird auch Potentialtheorie, ferner die Theorie der Kugel- und Zylinderfunktionen behandelt. *N. Hofreiter*, Wien

Theory and Problems of Vector Analysis and an Introductions to Tensor Analysis. Von *M. R. Spiegel*. (Schaum's Outline Series.) Mit 480 gelösten Problemen. 225 S. New York: Schaum Publishing Co. 1959. $ 3.25.

Wie alle bisher erschienenen Bände aus Schaum's outline series ist auch dieses Buch ein Übungsbuch, das den Studierenden zur Ergänzung der Vorlesungen sehr zu empfehlen ist. Jedes Kapitel beginnt mit Definitionen und Sätzen, die meist ohne Beweis angegeben werden. Dann folgt eine sehr große Anzahl von Aufgaben. Diese dienen teils der Übung, teils enthalten sie Beweise, teils bringen sie Anwendungen. Inhaltlich bringt das Buch die Vektoralgebra, die Differentiation und die Integration von Vektoren mit den für die Anwendungen wichtigen Theoremen und eine Einführung in die Tensoranalysis.

N. Hofreiter, Wien

Homotopy Theory. Von *Sze-Tsen Hu*. (Pure and Applied Mathematics: Band VIII.) XIII, 347 S. New York-London: Academic Press. 1959. Geb. $ 11.—.

Die von *Hurewicz* im Jahre 1935 begründete Homotopietheorie gewinnt gegenwärtig in der algebraischen Topologie mehr und mehr an Bedeutung. Das vorliegende Buch soll den Leser in die wichtigsten Gedankengänge dieser Theorie einführen und ihn dadurch zum Studium der Originalarbeiten fähig machen. Es ist deshalb verhältnismäßig ausführlich geschrieben, setzt aber selbstverständlich voraus, daß der Leser die Grundbegriffe der Topologie gut beherrscht. Da außer der 1953 erschienenen Monographie von *Hilton* bisher

noch keine Darstellung der Homotopietheorie in Buchform existierte, ist das Erscheinen dieses Werkes sehr zu begrüßen.

Inhalt des Buches: In den ersten beiden Kapiteln werden, ausgehend vom Erweiterungsproblem für Abbildungen, die Grundbegriffe und Hauptprobleme der Homotopietheorie erläutert und an Beispielen illustriert. Das dritte Kapitel bringt einen Abriß der Theorie der gefaserten Räume. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den Haupteigenschaften der Homotopiegruppen, während im fünften Methoden zu deren Berechnung entwickelt werden. Die beiden nächsten Kapitel behandeln die Theorie der Obstruktionen bzw. die Kohomotopiegruppen. Hierauf wird die Theorie der Spektralfolgen entwickelt und auf die gefaserten Räume angewendet. Nach einem Abriß von *Serres* Klassentheorie der abelschen Gruppen werden im Schlußkapitel die ersten Homotopiegruppen der Sphären berechnet. *W. Nöbauer*, Wien

Experimentelle Geometrie. Von *W. Lietzmann*. Mit 132 Textabb., 111 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 12.60.

Die experimentelle Geometrie ist eng mit der Anschauung verbunden und befaßt sich mit Konstruktionen, bei deren Durchführung auch andere Zeicheninstrumente als Lineal und Zirkel zugelassen sind. Die Konstruktionen werden nicht bloß — wie es *J. Steiner* bezeichnete — „mittels der Zunge", sondern tatsächlich mit Hilfe der Zeicheninstrumente ausgeführt. Für die experimentelle Geometrie sind nicht die „idealen", sondern die „realen" Elemente maßgebend; sie ist somit eine reale Geometrie, eine Wirklichkeitsgeometrie. Untersuchungen über die Zeichengenauigkeit spielen in dieser Geometrie eine wichtige Rolle. Faltung und Spiegelung sind zur Ableitung geometrischer Eigenschaften zugelassen; die Schere tritt als „geometrisches Arbeitsmittel" hinzu. Der gespannte Faden dient zur Erzeugung geodätischer Linien auf konvexen Körpern. In sechs Kapiteln gibt der bekannte Verfasser dem Leser in anregender Art einen guten Überblick über die zahlreichen Teilgebiete der experimentellen Geometrie: Lineal und Zirkel, Faltung und Spiegelung, Scherengeometrie, Fadengeometrie, Messungen, dynamische Geometrie. Auch diesmal hat *Lietzmann* seinem Werk zahlreiche gut gewählte Beispiele, viele wertvolle Literaturhinweise und interessante geschichtliche Bemerkungen beigegeben. *J. Laub*, Wien

Trigonometrie der Ebene. Von *W. Heymann*. Mit 134 Textabb. und 369 Aufgaben mit umfassendem Lösungsteil, 282 S. Leipzig: Fachbuchverlag. 1959. Geb. DM 12.50.

Der Verfasser hat die Trigonometrie der Ebene aus der Geometrie herausgelöst und sehr breit dargestellt. Dadurch war es möglich, ausführlich auf Einzelheiten einzugehen. Auch ein wenig geschulter Leser wird sich daher ohne Schwierigkeiten in diesem Buch zurechtfinden. Der Verfasser bemühte sich um wissenschaftliche Strenge und — was die Auswahl der Beispiele anlangt — um eine enge Verbindung zur Praxis. (Es ist jedoch kein „neuer" Weg, wenn man die Winkelfunktionen mit Hilfe des Einheitskreises definiert und darauf verzichtet, zuerst die Winkelfunktionen in Verbindung mit dem rechtwinkligen Dreieck einzuführen.) Es wäre vorteilhaft, auch den Tangenssatz und die Mollweideschen Gleichungen ohne Bezugnahme auf ein spezielles Dreieck abzuleiten so wie es z. B. bei der Ableitung der Formeln für den Halbwinkelsatz geschehen ist. Zahlreiche Beispiele sind ausführlich durchgerechnet; bei Vorhandensein mehrerer Lösungswege wurden auch diese berücksichtigt. Die Rechnungen sind

übersichtlich angeordnet. Viel Mühe wurde für die Figuren verwendet, die schön gezeichnet und übersichtlich beschriftet sind. Den einzelnen Kapiteln sind insgesamt 369 Aufgaben beigegeben. 80 Seiten wurden dazu verwendet, um die Ergebnisse in übersichtlicher Weise anzuordnen. 10 Seiten umfaßt die Formelsammlung mit Tabellen und Tafeln. Sehr zu begrüßen sind die geschichtlichen Bemerkungen. Durch die ausführliche Darstellung, die reichhaltige Aufgabensammlung und den Anhang mit den Lösungen ist das Buch auch sehr zum Selbststudium geeignet. *J. Laub*, Wien

Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen. 1. Band: Ebene und sphärische Trigonometrie. 2. Band: Kartenentwürfe und sphärische Astronomie. Von *W. Schmid* und *W. Borsdorf*. Mit 127 und 146 Textabb., XI, 203 und XI, 247 S. Freiberg (Sachs): Bergakademie Freiberg, Hauptabteilung Fernstudium. 1959. Geb. DM 9.80 (je Band).

Der erste Band beginnt mit einer ausführlichen Behandlung der ebenen Trigonometrie. Diese Ausführlichkeit bezieht sich auch auf die Beweise und auf die durchgeführten Beispiele. Dabei wird so mancher wertvolle Wink für ein zweckmäßiges und vorteilhaftes Rechnen angegeben. Ebenso ausführlich wird die sphärische Trigonometrie dargelegt. Bei der Ableitung des Sinus- bzw. des Cosinussatzes der sphärischen Trigonometrie wäre es günstig gewesen, sich dem Vorschlag *K. Kommerells* anzuschließen und den Beweis nicht nur für das spitzwinklige sphärische Dreieck zu führen. Es werden die Grundaufgaben der mathematischen Geographie (Entfernungsaufgabe, Peilungsaufgabe) rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt. Am Schluß des ersten Bandes sind 30 Seiten der ausführlichen Lösung der 127 Aufgaben gewidmet.

Im zweiten Band werden die bekannten Kartenentwürfe behandelt. Die stereographische Projektion kommt gebührend zu Wort. Sehr zu begrüßen sind die Ausführungen bezüglich der Anwendung der stereographischen sowie der gnomonischen Projektion in der Mineralogie (Wulffsches Netz, Hiltonsches Netz). Es folgt eine sehr verständliche Einführung in die sphärische Astronomie. Die Grundaufgaben der sphärischen Astronomie werden rechnerisch sowie zeichnerisch gelöst, ebenso zahlreiche Aufgaben aus der astronomischen Nautik. Auf 40 Seiten wird das Lösen der 90 Aufgaben bis ins Detail dargelegt.

Der ausführliche und sehr verständlich gehaltene Text sowie die gut überlegten, sehr schön gezeichneten, manchmal zu groß geratenen Figuren zeichnen dieses zweibändige Werk besonders aus. Sehr wertvoll sind die angeführten Anwendungen aus den Arbeitsgebieten des Bergmanns, des Vermessungsingenieurs, des Kartographen sowie Mineralogen. *J. Laub*, Wien

A Treatise on Algebraic Plane Curves. Von *J. L. Coolidge*. (Dover Books on Mathematics.) Mit 17 Textabb., XXIV, 513 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 2.45.

Diese neue Dover-Ausgabe ist ein unveränderter Abdruck dieses bekannten und beliebten Lehrbuches der ebenen algebraischen Kurven, das bei aller Eleganz und Kürze der kalkülmäßigen Darstellung doch nie das eigentlich geometrische Anliegen des behandelten Sachgebietes vergißt. Die erste Auflage wurde in dieser Zeitschrift Mh. Math. **39**, 46 (1932) besprochen. Die Hauptteile sind: elementare Theorie, singuläre Punkte, Punktgruppen auf algebraischen Kurven und Kurvensysteme. Im elementaren Teil werden nach einer kurzen Einführung

über Polynome die gewöhnlichen und singulären Punkte algebraischer Kurven, das Geschlecht, die Plückergleichungen sowie die Kleinsche Relation, die kovarianten Kurven und metrische Eigenschaften besprochen sowie eine erste Orientierung über die elementare Invariantentheorie in der symbolischen Schreibweise von *Aronhold* und *Clebsch* gegeben. Die Behandlung der singulären Punkte im zweiten Hauptteil stützt sich auf die Reduktion unter Verwendung quadratischer Transformationen und die Puiseuxschen Reihen zur Erfassung der Zweige algebraischer Kurven. Nach Behandlung der linearen Scharen von Punktgruppen auf algebraischen Kurven und des *Riemann-Roch*schen Satzes werden die Abelschen Integrale eingeführt und die Modulen besprochen. Die Behandlung nichtlinearer Punktgruppen sowie das Problem der Parameterdarstellung insbesondere rationaler Kurven beschließt den dritten Hauptteil. Der letzte Abschnitt schließlich bespricht die linearen und nichtlinearen Kurvensysteme sowie die Cremonatransformationen unter Hervorhebung von geometrisch besonders ergiebigen Sonderfällen. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis beschließt dieses anregende Buch, das weit über den obigen Inhaltsüberblick hinaus eine überraschende Fülle von primär geometrisch interessanten Problemen der Theorie ebener algebraischer Kurven enthält. *H. Brauner*, Wien

Graphisches Rechnen und Nomographie. Von *W. Schmid*, *A. Haendel* und *W. Schöne*. Zweite Auflage. Mit 111 Textabb., VIII, 228 S. Freiberg (Sachs): Hauptabteilung Fernstudium der Bergakademie Freiberg. 1957. Geb. DM 10.—.

In diesem Buch werden an Vorkenntnissen nur die elementarsten aus der Differential- und Integralrechnung verlangt, wie sie wohl jeder besitzt, der sich nur ein wenig mit höherer Mathematik befaßt hat. Es eignet sich auch gut für den Selbstunterricht, da dem Studierenden durch Wiederholungsfragen und Übungen die Möglichkeit gegeben wird, festzustellen, ob er das Gebotene ordentlich verstanden hat und ob er es anwenden kann. In den ersten Kapiteln werden die Funktionen zwischen zwei Veränderlichen behandelt. Zunächst wird das Zeichnen von Diagrammen gezeigt, dann das Zurechtrichten der Skalen entsprechend den speziell zu stellenden Forderungen, weiter die Einführung besonderer Leitern, wie logarithmischen und projektiven, daneben Betrachtungen, die zeigen sollen, wieweit lineare Interpolation in Leitern statthaft ist. Der weitere Teil des Buches befaßt sich mit der graphischen Ermittlung von Funktionen zwischen drei Veränderlichen. In den nächsten Kapiteln werden die Netztafeln behandelt, insbesondere solche, bei denen die Kurven darin Gerade werden. Dann werden die Fluchtentafeln behandelt, das sind Diagramme mit drei geraden oder krummen mit Skalen versehenen Linien, bei denen die Funktionsbeziehung dadurch hergestellt wird, daß man die Argumente auf zwei Skalen aufsucht, diese durch eine gerade Linie verbindet und dann am Schnittpunkt mit der dritten Skala an dieser den Funktionswert abliest. Schließlich werden noch zusammengesetzte Nomogramme behandelt. Bei allen angeführten Beispielen (sowohl Musterbeispielen wie Übungsaufgaben) sind die zu zeichnenden Diagramme und Nomogramme im Buch abgedruckt, so daß sich der Leser leicht klarmachen kann, wie diese auszusehen haben. Im allgemeinen wird die Theorie von Nomogrammen nicht allzuweit entwickelt, aber das, was davon gebracht wird (und das genügt sicher oft) ist sehr leicht zu verstehen. So kann dieses Buch dem Studierenden bestens empfohlen werden.

G. Schrutka-Rechtenstamm, Wien

Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory. Von *M. Kac.* (The Carus Mathematical Monographs: Number 12.) Herausgegeben von The Mathematical Association of America. XIV, 93 S. New York: J. Wiley & Sons. 1959. $ 3.—.

Das Buch befaßt sich in fast allen Kapiteln mit dem Begriff der statistischen Unabhängigkeit. Dieser Begriff wurde bekanntlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt und wurde wie so manches zunächst recht vage erklärt. Es wird gezeigt, wie der Begriff heute mit Hilfe der Lebesgueschen Maßtheorie einwandfrei formuliert wird. Interessant sind die mannigfachen Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitstheorie mit der Analysis und der analytischen Zahlentheorie. Das letzte Kapitel bringt eine Anwendung des Ergodentheorems auf Kettenbrüche. *N. Hofreiter*, Wien

Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie. Von *W. Meyer-Eppler.* (Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen: Band 1.) Mit 178 Textabb. und 1 Tafel, XVIII, 446 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 98.—.

Die mathematische Theorie der Information erlaubt Anwendungen auf so verschiedenen Gebieten, daß es manchmal schwer ist, zu unterscheiden, ob eine solche Anwendung überhaupt zweckmäßig ist. Es ist daher sehr zu begrüßen, wenn in diesem Buch der Versuch unternommen wird, einerseits die mathematischen Grundlagen der Theorie möglichst verständlich darzustellen, andererseits aber auch möglichst alle Anwendungen (mit Ausnahme rein mathematischer Untersuchungen und der Verwendung der Informationstheorie in der mathematischen Statistik) zu behandeln. Man kann so den praktischen Nutzen vieler Ergebnisse der Theorie besser einsehen und andererseits auch erkennen, was die Theorie nicht leistet. Inhalt: I. Die Kommunikationskette. II. Strukturtheorie der Signale. III. Eigenschaften linearer Übertragungssysteme. IV. Symbolstatistik. V. Gestörte Systeme. VI. Sicherung gegen Übertragungsfehler. VII. Die Sinnesorgane als Informationsempfänger. VIII. Signal und Zeichen. IX. Akustische und optische Valenzklassen als Zeichenträger. X. Formstrukturen und Konstruktionen. XI. Die gestörte sprachliche Kommunikation. Im Anhang finden sich verschiedene Tabellen und Übersetzungen der englischen Fachausdrücke.

Der große Ideenreichtum des Werkes und die stets auf das Praktische gerichtete klare Darstellungsweise des Verfassers werden den sehr zahlreichen Interessenten von um so größerem Nutzen sein, als verschiedentlich noch große Verwirrung über die Bedeutung der auf diesem Gebiet gewonnenen Erkenntnisse herrscht. *K. Prachar*, Wien

Die Welt der Sterne. Von *W. Brunner.* Zweite unveränderte Auflage. Mit 152 Textabb., 288 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1959. Geb. DM 16.—.

Hervorgegangen aus einer Vorlesungsreihe des 1958 verstorbenen Verfassers, des früheren langjährigen Direktors der Sternwarte Zürich, „für Hörer aller Fakultäten" an der dortigen Universität, versucht das Buch mit pädagogischem Geschick, etwa auf dem Allgemeinwissen eines Maturanten aufbauend eine wissenschaftlich gut fundierte und dabei sehr ansprechend geschriebene Einführung in die Astronomie zu geben. Als Konzession an jene Leser, die es vorziehen, in zwangloser Form belehrt zu werden, ist der Aufbau nicht streng systematisch, sondern setzt bei dem stets verlockenden Thema „Entdeckungen"

an: die Entdeckungsgeschichte der drei äußersten Planeten, dann einiger bemerkenswerter Planetoiden, sowie der merkwürdige Sternschnuppenfall vom 9. Oktober 1933 geben je das Stichwort zu den ersten drei Kapiteln. Aber der Verfasser bleibt nicht bei der Sensation als solcher stehen, sondern führt den Leser an die tieferen Zusammenhänge heran, wobei er auch einfache formelmäßige Entwicklungen benützt. In weiteren Kapiteln werden Methoden und Ergebnisse der physischen Erforschung der Planeten, das Problem der Entfernungsbestimmung im Sonnensystem in ungefährer Anlehnung an die geschichtliche Entwicklung, und zuletzt die Kometen behandelt, mit denen der erste Teil abschließt.

Im Zusammenhang mit Sternkarten und Katalogen bietet sich Gelegenheit, die Grundbegriffe der sphärischen Astronomie, Präzession, Nutation usw. einzuführen. Das umfangreichste Kapital ist aber den physischen Eigenschaften der Sterne gewidmet. Wieder folgt das historisch gesehen ältere Problem ihrer Entfernungsbestimmung erst an nächster Stelle. Doppelsterne, einschließlich der photometrisch-spektroskopischen, sowie die interstellare Materie und endlich das Milchstraßensystem als Ganzes mit den Grundgedanken der Stellarstatistik und Stellardynamik werden wieder in je einem Kapitel behandelt. Den natürlichen Abschluß bildet die Behandlung der extragalaktischen Systeme.

Zwei wichtige Problemkreise großen Umfanges sind bewußt ausgelassen worden, nämlich die Physik der Sonne (für welche *Brunner* auf die Bücher eines Spezialisten, seines Amtsnachfolgers *M. Waldmeier*, verweisen konnte) und die physisch veränderlichen Sterne, von denen nur die Delta-Cephei-Sterne im Zusammenhang mit der Entfernungsbestimmung erwähnt werden. Im übrigen ist es aber beinahe erstaunlich, wieviele wissenswerte Einzelheiten in diesem oder jenem Zusammenhang eingeflochten werden. Besondere Anerkennung verdienen die vielen klaren und lehrreichen Strichzeichnungen, während man sich für einige der Halbtonbilder lieber Kunstdruckpapier gewünscht hätte.

Von kleineren Versehen sei, weil allgemein wenig bekannt, der Umstand erwähnt, daß Delambre's Uranus-Tafeln von 1789 nicht die ersten ihrer Art waren: schon im Anhang der Wiener Ephemeriden für 1787 sind Uranus-Tafeln von *Pl. Fixmillner* abgedruckt, die allerdings infolge der damaligen Zeitverhältnisse in Frankreich wohl kaum Beachtung fanden. Eine wichtigere Beanstandung betrifft die Ausführungen über Sterntemperaturen: die Erklärungen über die Gründe der starken Abweichungen zwischen verschiedenen Farbtemperaturskalen sind zu knapp für den Laien im Verhältnis zu der S. 136 gebotenen ausführlichen Tabelle, deren letzte Zeile — Mittelwerte über Zahlen so heterogener Herkunft — besser unterdrückt worden wäre. Zugleich wäre hier Gelegenheit gewesen, die Problematik der bolometrischen Korrektionen bei Sternen extremer Temperaturen anzudeuten.

Das Buch, so wie es ist, konnte auf weite Strecken 13 Jahre nach seinem ersten Erscheinen unverändert abgedruckt werden, ohne in bedenklichem Maß veraltet zu sein. Auf einen besonders wichtigen Punkt hätte der Verfasser, wäre ihm ein längeres Leben vergönnt gewesen, vielleicht doch im Vorwort oder anhangsweise wenigstens kurz hingewiesen: wir meinen die 1952 veröffentlichte fundamentale Erkenntnis *Baade*'s, daß eine bedeutende Korrektur des Nullpunkts der Periode-Leuchtkraft-Beziehung notwendig sei, wodurch die darauf beruhenden extragalaktischen Entfernungen ungefähr verdoppelt werden.

K. Ferrari d'Occhieppo, Wien

Measurement: Definitions and Theories. Herausgegeben von *C. W. Churchman* und *Ph. Ratoosh*. Mit 11 Textabb. VIII, 274 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 7.95.

Im Dezember 1956 fand in New York ein Treffen der amerikanischen Gesellschaft für die Fortschritte der Wissenschaften zu dem Zwecke statt, es den Teilnehmern an diesem Treffen zu ermöglichen, die grundlegenden Probleme der Theorie und der Praxis der Messung in der Wissenschaft gemeinsam diskutieren zu können. Entsprechend den Teilnehmerkreisen zerfällt das Buch in 5 Teile. In einem 1. Teil wird der Begriff der Messung von verschiedenen Autoren von verschiedenen Gesichtspunkten her beleuchtet. Kap. 2 enthält Theorien der Messung vom logistischen Standpunkt aus. In Teil 3 erörtern Physiker das Problem der Messung in der Physik und in Teil 4 Psychologen und Gesellschaftswissenschaftler das Problem der Messung in der Psychologie und in der Soziologie. Da alle Referenten hervorragende Vertreter ihres Faches sind, dürften alle Beiträge den augenblicklichen Stand des Meßproblems in den einzelnen Fachdisziplinen wiedergeben und dürften von allen an diesen Problemen Interessierten mit größtem Genuß gelesen werden können. *Th. Sexl*, Wien

Über physikalische und mathematische Abhängigkeit. Umrisse einer neuen Analyse. Von *R. Orthner*. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 5 Textabb., VII, 60 S. Wien: Verlag F. Deuticke. 1959. S 30.—.

In dem im Jahre 1919 erschienenen Buche „Entwurf einer Theorie der physikalischen Abhängigkeit" suchte der Verf. zu zeigen, „daß man alle geometrischen und physikalischen Probleme als Summierungsvorgänge auffassen könne und daß es möglich sei, aus der Art dieser Summierung, dem Mechanismus des Problems, auf den Zusammenhang der betreffenden Größen zu schließen." Den gleichen Gedankengängen war die erste Auflage der vorliegenden Schrift gewidmet, die im Jahre 1928 erschien. Die Hoffnung, daß Mathematiker von Fach die neuen Ideen des Verf. aufgreifen und ein zum schulmäßigen Gebrauch geeignetes Verfahren entwickeln würden, erfüllte sich leider trotz den günstigen Gutachten der Professoren *Emil Kohl*, *Erwin Schrödinger* und *Hans Thirring* bisher nicht. Aber vielleicht geschieht dies im Anschluß an das Erscheinen der zweiten Auflage des Buches. *Th. Sexl*, Wien

Theorie der elastischen Verformung. Von *W. Müller*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik: Reihe A, Band 27.) Mit 73 Textabb., XI, 327 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1959. Geb. DM 31.50.

Das vorliegende Buch, das aus Vorlesungen des Verf. an der Universität München hervorgegangen ist, gliedert sich in zwei Hauptteile, deren erster die allgemeinen Probleme, deren zweiter die speziellen Probleme der Elastomechanik enthält. Besonders begrüßenswert an der vorliegenden Darstellung ist die Verwendung der anschaulichen Dyadenrechnung unter Verwendung der in dem Buche von *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig, Akad. Verlagsges., 1934 (ebenfalls in der Reihe Mathematik und ihre Anwendungen erschienen) entwickelten Symbolik dieser Rechnungsart. Dadurch gewinnt die Darstellung der Elastomechanik eine für den Physiker nicht hoch genug einzuschätzende Anschaulichkeit und Lebendigkeit. Im allgemeinen Teil wird zunächst in den Kap. 1 bis 3 die Verzerrungs- und Spannungsdyade und der

Zusammenhang zwischen Verzerrung und Spannung, der in der Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Elastomechanik gipfelt, erörtert. Daran schließen sich in den Kap. 4 und 5 die Sätze über die Formänderungsenergie und die Erörterung des Energiesatzes in der Elastomechanik an. In dem besonders wertvollen Kap. 8 findet sich die Transformation der Bewegungsgleichungen der Elastomechanik auf die wichtigsten krummlinigen Orthogonalkoordinaten, ebenfalls auf Grund allgemeiner Dyadenoperationen behandelt. Dann folgt der spezielle Teil mit einer ausführlichen Erörterung der Torsions- und Biegungstheorie, der Schwingungs- und Wellenprobleme. Besonders geglückt erscheint die Darstellung der für den Anfänger nicht immer ganz leichten Schalentheorie auf Grund der in dem Kap. 6 des allgemeinen Teils entwickelten Methoden der Variationsrechnung. Verf. und Verlag können zu dem schönen Buche beglückwünscht werden, das in den an den Problemen der Elastomechanik interessierten Kreisen der Physiker und Ingenieure sicherlich die weiteste Verbreitung und Verwendung erringen wird. *Th. Sexl*, Wien

Theory of Plates and Shells. Von *S. Timoshenko* und *S. Woinowsky-Krieger*. (Engineering Societies Monographs.) Second Edition. Mit 280 Textabb., XIV, 580 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1959. £ 5 16s. 6d.

Das vorliegende Buch hat sich seit dem Erscheinen der ersten Auflage im Jahre 1940 als Standardwerk auf dem von ihm behandelten Spezialgebiet der Elastomechanik erwiesen. In der neuen Auflage wird die seither erschienene Literatur berücksichtigt, was zu manchen Erweiterungen und Ergänzungen des Textes der ersten Auflage zwang, so daß der Umfang der zweiten Auflage wesentlich vergrößert werden mußte. Besonders wichtig erscheinen die neuen Kapitel 3 und 11 bzw. über die Biegung von Platten auf elastischen Unterlagen und über die Biegungstheorie von anisotropen Platten. Für den Praktiker besonders bedeutungsvoll ist das neue Kapitel 10 über spezielle und Näherungsmethoden in der Theorie der Platten. In den Kap. 14 bis 16, die die Schalentheorie enthalten, werden viele seit 1940 erschienene Arbeiten verarbeitet. Es war jedoch nicht möglich, die gerade auf diesem Gebiete besonders umfangreiche Literatur der letzten 15 bis 20 Jahre vollständig zu berücksichtigen, zu der insbesondere sowjetische Wissenschaftler die entscheidenden Beiträge geliefert haben. Erst kürzlich erschien jedoch von einem Spezialisten auf diesem Gebiet, *V. V. Novozhilov*, ein Buch über die Theorie dünner Schalen, das alle einschlägige russische Literatur auf diesem Gebiete zusammenfassend darstellt. Entsprechend dem vergrößerten Umfang der zweiten Auflage des Buches wurde auch die Zahl der Figuren um nahezu 100 vermehrt. Auch die zweite Auflage des Buches von *Timoshenko* dürfte sich für alle an den Problemen der elastomechanischen Theorie von Platten und Schalen interessierten Physikern und Ingenieuren als unentbehrliches Nachschlage- und Standardwerk erweisen.

Th. Sexl, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Einführung in die symbolische Logik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen

Von

Dr. Rudolf Carnap

Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 5 Textabbildungen. XII, 241 Seiten. Gr.-8°. 1960

Ganzleinen S 168.—, DM 28.—, sfr. 28.70, $ 6.65

Die symbolische Logik ist eine Grundlagenwissenschaft ersten Ranges geworden, deren Bedeutung heute vor allem in den angelsächsischen Ländern außerordentlich hoch eingeschätzt wird. Nach den Worten des Verfassers, der, aus dem „Wiener Kreis" kommend, selbst maßgeblich an der Gestaltung dieser Wissenschaft mitgewirkt hat, ist die Symbolik eine unter genauen Regeln stehende Sprache, durch deren Verwendung die Formen des eigenen Denkens geschärft werden können. So betrachtet, ist die symbolische Logik ein wichtiges Werkzeug in Forschung und Unterricht und ein unentbehrliches Hilfsmittel für alle, die sich mit Erkenntnisphilosophie, Sprachanalyse, Grundlagen der Mathematik, axiomatischen Methoden und verwandten Problemen beschäftigen. Zum Unterschied von den übrigen, meist in englischer Sprache geschriebenen Lehrbüchern geht das Buch über die elementare Theorie hinaus, bringt auch die höheren, vor allem für die Anwendung wichtigen Gebiete, wie die Logik der Relationen, und schließlich in geschlossener Darstellung die Anwendungen selbst. In der vorliegenden zweiten Auflage sind einige Abschnitte neu hinzugefügt worden; andere sind erheblich umgearbeitet worden. Ferner werden zahlreiche neue Übungsaufgaben gegeben.

Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit.

Von Dr. **Rudolf Carnap**, Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles. Bearbeitet von Dr. Dr. Wolfgang Stegmüller, o. Professor an der Universität München. VIII, 261 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60

Das Buch wendet sich sowohl an den Philosophen, der ein besseres Verständnis des Begriffes „Wahrscheinlichkeit" und des Grundes für die Gültigkeit von Wahrscheinlichkeitsschlüssen zu gewinnen sucht, als auch an den Logiker, der nach einem System der induktiven Logik Umschau hält, das nach ebenso exakten Prinzipien aufgebaut ist wie die symbolischen Systeme der deduktiven Logik. Aber auch der Naturwissenschaftler, der sich für die erfahrungswissenschaftliche Erkenntnis als hypothetisches Wissen interessiert, und der Mathematiker und Statistiker, dem es um eine Klärung von Wesen und Gültigkeit der statistischen Schlüsse geht, werden das Buch mit Nutzen zu Rate ziehen.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Nationalökonomie

Grundlagen für eine exakte Theorie

Von

Dipl.-Ing. **Franz Korenjak**

Wien

Mit 84 Textabbildungen. XXIV, 374 Seiten. Gr.-8°. 1960

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Die theoretische Nationalökonomie ist noch weit vom Status einer exakten Wissenschaft entfernt. Die vorliegende Arbeit hat sich die Aufgabe gestellt, ein Fundament für eine exakte Nationalökonomie zu errichten.

Die in früheren Zeiten verschiedentlich aufgestellte Behauptung, daß die Nationalökonomie nie eine exakte Wissenschaft werden könne, wird wohl kaum mehr ernst genommen und es fehlt nicht an Versuchen, eine derartige Theorie von verschiedenen Seiten in Angriff zu nehmen: Die „Ökonometrie" geht in analoger Richtung wie die exakten Naturwissenschaften vor, indem sie versucht, von den Erscheinungen induktiv auf die Gesetze des Wirtschaftens zu schließen (wie der Autor einleitend ausführt, kann dieser Methode nicht der gleiche Erfolg beschieden sein wie in den Naturwissenschaften, da in der Wirtschaft keine Versuche mit Variation von nur wenigen Größen angestellt werden können); rein mathematische Theorien stellen Axiomensysteme auf — eine Arbeit, die erst wertvoll wird, sobald man weiß, welche Axiomensysteme der theoretischen Nationalökonomie adäquat sind —; die Wiener Schule schließlich zeigte den Weg bzw. den Ausgangspunkt, wie der Autor im ersten Abschnitt darlegt.

Die unmittelbar evidenten Grundtatsachen des menschlichen Verhaltens werden als Grundlage der ganzen Theorie analysiert, und zwar wesentlich tiefer schürfend als von den Begründern und Nachfahren der Wiener und der Lausanner Schule. Davon ausgehend wird der Ablauf der Wirtschaft unter Verwendung einer möglichst einfachen Mathematik untersucht, wobei die unvermeidlichen idealisierenden Voraussetzungen in vieler Hinsicht weniger einschränkend sind als etwa bei der Lausanner Schule und ihren Nachfahren. Für eine Weiterentwicklung der Theorie unter schrittweiser Aufhebung dieser idealisierenden Voraussetzungen bildet eine Arbeit wie die vorliegende die unentbehrliche Grundlage, da nur so die begrifflichen Zusammenhänge erstmals geklärt und angemessene wirtschaftliche Begriffe exakt definiert werden können.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung